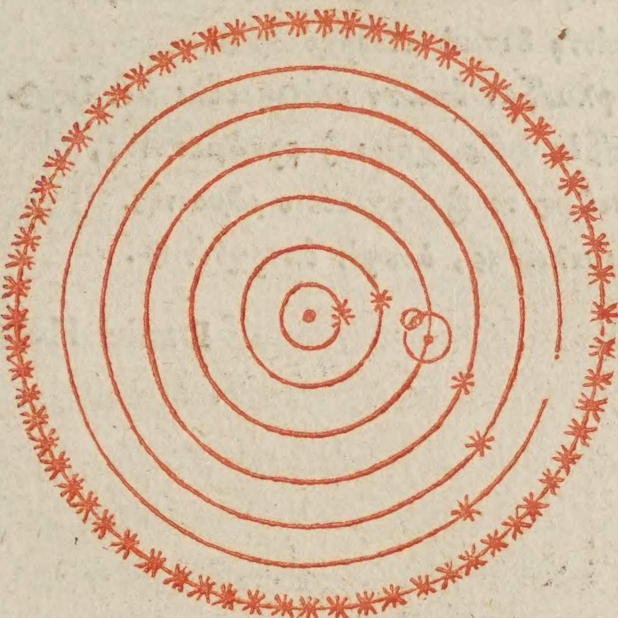
PHILIPPI LANSBERGII
CYCLOMETRIÆ NOVÆ
LIBRI DVO

Ad Illuſtriſsimum Principem

MAVRICIVM NASSOVIVM

ET

Illuſtres ac Potentes Zeelandiæ Ordd.



ὁ Θεὸς ἀεὶ κυκλομετρεῖ.

MIDDELBVRGI
Ex officina RICHARDI SCHILDERS
CIↃ IↃ CXVI.

In Cyclometrica Reverendi viri
PHILIPPI LANSBERGII.

Ἀθανάτου σοφίης πρὶν ὑπερχθονίην ἀναβαίνων
  Οἶμον ὁ Λάνσπεργος, σὺν δὲ κεράσσάμενος
Χριστιανοῖς ζαθέοισιν ἀληθοσύνης γλυκὺ φίλτρον,
  Εὐεπίῃ γλώσσης εἰς ἅμα καὶ σελίδων·
Νῦν πάλιν Εὐκλείδαο νόον προσέθηκεν ἀγαστὸν
  Δέλτοις ἀενάοις, κυκλομετρησάμενος,
Πᾶς ἐπ' ἀληθείῃ πεπλασμένος· ἱρὰ δ' αὐτῆς
  Ἴχνια καὶ πάντῃ θεσμὰ μετερχόμενος.
Οὖλε μοι ὦ φλανδρῶν ὕπατον κλέος· οὖλε μοι εὖχος
  Γάνδης μητρὸς ἐμῆς. χαῖρε δὲ φραδμοσύνης,
Χαῖρε καὶ ευσεβίης τε καὶ ἀγχινόοιο μενοινῆς.
  Νῦν ὑπερευκλείδης, ὁ πρὶν ὑπερχθόνιος.

Daniel Heinſius.

Illuſtriſsimo Principi ac Domino, D. *Mauricio* Principi Auraico, Comiti Naſſovio, &c. Gubernatori Belgij confœderati, & Αρχιϛρατεγῷ, &c.

ET

Illuſtribus ac Potentibus Zelandiæ Ordd. Dominis ac Mecœnatibus ſuis ſibi plurimùm venerandis.

CIRCVLI geodœſia, quam magnus Archimedes κύκλȣ μέτρησιν appellat, propter utilitatem quam ſocietati hominum atque cõmunitati adfert inſignem, jam multis ab hinc ſeculis ubivis gentium exculta eſt. Et primùm ante annos bis mille & ſexingẽtos in Palęſtina, ſub magni Solomonis imperio. Tunc enim inter cætera tẽpli ornamenta inteſtina, cõſtructum fuit mare æneum circũquaq; rotũdum, factaque ipſius dimenſione, deprehenſum, quod decem cubiti eſſent à labij parte unâ ad alterã, & quod filum triginta cubitorum idem cingeret circumquaque. Erat itaque tum temporis Cyclometria quædam in uſu, rudis ſcz. illa, quæ diametri & peripheriæ rationẽ ponebat triplam, hoc eſt, ut X ad XXX.

At ſeptingentis annis poſt Solomonem, circa Platonis tẽpora, accuratior quædam circuli dimenſio in Græcia caput efferre cepit, quãdo magni Viri Bryſo, Antipho, Hippocrates Chius, Cyclometrica ſua inventa, dabant in publicum, laudemq; Cyclometriæ invẽtæ ſinguli affectabant. Bryſo-

nem enim excipiebat Antipho, Antiphontē Hippocrates, atque hunc deinceps alij, manente tamen Cyclometriæ laude penes Hippocratem. Nam ut teſtis eſt Ariſtoteles, Bryſonis τετραγωνισμὸς erat ἐριστικὸς, ψευδόγραφος; Antiphontis reprehenſione Geometrica indignus. Hippocratis contra qui fiebat per μηνίσκους verè erat Geometricus: quo tamen poſteritas minimè fuit cōtenta, quod non tam circuli eſſet, quàm duorum circuli μηνίσκων.

Hos omnes, qui σύγχρονοι erant, ducentorum proximè annorū intervallo ſequutus eſt Archimedes Syracuſanus, vir miræ ſagacitatis, qui τμημαχισμὸν Antiphontis mutuatus duo demonſtravit; unum, cuiuſlibet circuli circūferentiam ſuæ diametri eſſe triplam, & adhuc excedere minori quidē parte quam ſeptimâ diametri, majori autem quam decem ſeptuageſimis primis. Alterum, Omnem circulum æqualem eſſe triangulo rectangulo, cuius unum latus circa rectum æquatur radio circuli, alterum perimetro. Quæ elementa etſi poſteritas agnoverit γεωμετρικῶς ab Archimede eſſe demonſtrata, non acquievit tamen in ipſius Cyclometria, quam tertio elemento propoſuit, quòd à veritate nonnihil diſtaret. Teſtes ſunt Apollonius Pergæus magnus Geometra, Ptolemæus Alexandrinus Aſtronomiæ Princeps, Philo Gadarenus, atque alij quorum Eutocius Aſcalonita meminit, qui omnes ſummâ ope ac ſtudio conati ſunt Cyclometricum negotium ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγάγειν. In quam quoque cogitationem & curam incubuerunt Dinoſtratus, Nicomedes, & quotquot deinceps Mathematici præſtan-

tes

tes ſequuti ſunt ad noſtra uſque tempora.

Porro cùm nobis valdè doleret, nobiliſſimam Geometriæ partem, in qua tot ſeculis totque à Geometris ſudatum eſſet, in ſplendorem ſuum non modò nondum eſſe redditam, ſed ψευδοτετραγωνισμοῖς multorum magis fœdatam, ingenſq; reſtituendi eam cupiditas animum noſtrum inceſſeret; admovimus & nos, σὺν τῷ Θεῷ, operi manum, obſervataq; circuli naturâ, ac ſignis quæ illi inſunt, tandē poſt aliquot annorum vigilias, & pertinacem cogitandi aſſiduitatem, Cyclometriā de integro exſtruximus, novam quidē, ſed quæ cum vetere de palmâ certare audeat. Hanc Flacci cōſilio nonum preſſimus in annum: verùm quia ultra jam premi negat, bono rei literariæ manumittimus. Stat enim in carceribus ὥσπερ ἵππος τὶς εὐγενὴς ὀρθὸς ὃς ἵςησιν.

Vt autem in manus hominum veniret gratior, volui eam Illuſtriſsimæ T.C. ac DD. V. Illuſtribus & Potentibus inſcribere, Archimedem ſequutus, qui partem operum ſuorum optimam dicavit ſuo Doſitheo. Etſi enim Mathemata per ſe Mathematicis Viris ſint accepta, tamen quia perſæpè incidunt in manus ἀγεωμετρήτων, utile eſt laudatorum Virorum nominibus eſſe inſignita, ut qui ab illis abhorrent maximè, eorum ſaltem exemplo ad ea invitentur.

Inprimis decet ut qui Mathematica tractant publicè, bonorum ac ſapientum Principum mētionem faciant. Nam quia boni & ſapientes Principes hæc ſtudia præcipuè juvant, conſentaneum eſt ut ij quibus opem ferunt, viciſſim

virtu-

virtutem ac liberalitatem eorum agnoſcant, quantumque fieri poteſt, grato animo prædicent. Quamobrem cùm & vos eſſe Mathematicarum artium fautores conſtet, & te, Princeps Illuſtriſſime, inter Mathematicos noſtri ſeculi primum; æquum eſſe putavi ut & ego ſapientię ac virtutũ Veſtrarum ornamenta publico teſtimonio cõprobarem: præſertim cum totos triginta annos benevolentiæ Veſtræ aurâ fuerim afflatus, iamque in hoc meo ſenio, ſummo Veſtro favore ac magnificentiâ, ocio fruar literario. Agnoſco enim & me hoc nomine Vobis debere plurimũ, & illos quoque qui deinceps ocij noſtri fructum percipient.

Oro itaque te Illuſtriſſime Princeps, Voſque Ordd. Illuſtres & Potentes, quàm poſſum reverenter, Cyclometriam ut hanc noſtram, in ſpeciem quidem exiguam, ſed materia & labore maximam, patiamini ſub Illuſtriſſimis V. Nominibus venire in lucem; eamque extare ut publicum obſervantiæ ac gratitudinis meæ erga Vos monumentum. Hoc enim animo eandem Vobis do, dico, conſecro, cupioque ut quæ laus inde expectanda eſt, Vobis cedat; Quibus jam pridem me totum devovi; Quibuſque jam ſtudia mea ſubmiſsè cõmendo. Vale Illuſtriſsime Princeps, & Vos Ordd. Illuſtres ac Potentes. Middelburgi Zelandiæ, pridie Idus Ianuar. CIↃ IↃ CXVI.

Illuſtriſs. T. Celſitudini, ac DD. V.
Illuſtribus & Potentibus

Addictiſſimus

P. LANSBERGIUS.

Ex literis Clariſsimi, Doctiſsimique viri Willebrordi Snellij, R. F. ad Philippum Lanſbergium.

TVAM verò novam quadraturam non leviter admiror, qui etiam in vaſtiſſimis illis numeris tam prope verum collimaris; unde facilè conjecturam capio, eam vero aſſidere. Quod tamen Cl. Ludolphum in ratione diametri & peripheriæ conſtituenda hallucinatum cenſes, haud poſſum tecum ſentire: neque enim eſt ratio legittima quam ponis 2000000000000000000000 ad 6283185307179586476912 8. Sed iſta 20000000000000000000000000 ad 62831853071795864769252867 & amplius. Habes numeros tuis majores. Cæterum veriſſimè illud notaſti omnes Veterum quadraturas in numeris maximè expediri. Nam volutas Siſyphus aliquis per puncta & pinnas rotabit, volvetque. Apage mihi iſtas, quia à χειρουργία ſunt alieniſſimæ. Quare quod ais ex tuo invento rectam circulo quadrando proximé æqualem ita deſcribi, ut facilitas cum certirudine contendat, eo ipſo ſine dubio mirificè hominum ſtudia excitabis. Imò quis tibi non plaudet, cùm videbit unum aliquem hac ætate inventum, qui non deſperarit ſecula proficere ſemper? qui non dubitarit cum ſummis Mathematicis de prima ſummâque Matheſios laude decertare. Archimedem redivivum, quadratorem novum te amplectetur hæc ætas, agnoſcent poſteri, qui primus poſt Veteres novo epichiremate id opus tentaris & perfeceris; & propterea grato animo tuam memoriam recolent, cum tanto & tam amplo patrimonio mathematicam rempublicam à te auctam & locupletatam cogitabunt. Imò nos beabis, cum quadratores novos, qui è nido evolant crocitatores odioſi & moleſti, nobis amplius moleſtos eſſe non ſines. Eſt enim quoddam hominum genus inſolita temeritate, & impudenti audacia, qui ſimul ac oculos Barbarico cœno infoſſos pauxillum mathematico ſole cla-

clariores habent, ſtatim in circuli quadraturam tanquam materiam ſuis viribus aptam involant, atque ea quæ ex antiquo ignorantiæ cœno hauſere, nobis tanquam maximè ratas ſententias obtrudere conantur. Hinc tanta ψευδοτετραγωνιστῶν, omnibus ævis copia, neque enim hoc hominum genus demum χθὲς καὶ πρῴην εἰς τοὺς ἀνθρώπους εἰσεφθάρη, vetus hoc malum eſt, & Veteribus quoque adgnitum. Atque ideo tanto impenſiùs te rogo Clariſſime *LANSBERGI*, ne iſta diutius premas, neve ante actas tuas vigilias ſinas interire, quod futurum fuiſſe ſcribis, niſi aliquando à nobis excitatus, & in antiquam palæſtram penè reductus eſſes. Neque enim decet te Aſpendium cithariſtam imitari, quem omnia intus canere dicebant, ut tu quoque tibi ſoli ſapias; ſed multo magis ut publicè proſis, & Belgici nominis claritatem nunc ad exteros, olim verò ad poſteros propages. Vale Vir Clariſſime, & affectum quo nos hactenus complexus es deinceps porro continuato. Lugduni Batavorum XI. Octobr. CIↃ IↃ CVII.

Tuus, tibique addictiſsimus

VVILLEBRORD. SNELLIVS R F.

Lectori benevolo S.

HAbes, Lector benevole, Cyclometrica noſtra, jamdiu à nobis efflagitata; quæ ſi grata tibi eſſe cognovero, dabo operam vt Aſtronomica noſtra, ſaltem pars eorum prima de motu diurno, annuo, menſtruo, mox ad te perveniat. Vale bone Lector, & ſtudijs noſtris fave.

CYCLO-

CYCLOMETRIÆ

LIBER I.

De dimenſione circuli ambitus.

I. *Cyclometria eſt pars Geometriæ quæ circulum benè metiri docet.*

QVOD magnus Archimedes κύκλȣ μέτρησιν appellat, nos una voce Cyclometriam dicimus. Pars eſt Geometriæ nobiliſſima in qua ſe exercuerunt præſtantiſſimi Geometræ, priſco quidem ſeculo, *Bryſo*, *Antipho*, *Hippocrates Chius*, *Dinoſtratus*, *Euclides*, *Archimedes Syracuſanus*, *Appollonius Pergæus*, *Ptolemæus*, *Nicomedes*, *Pappus Alexandrinus*, *Sporus Nicenus*, *Philo Gadarenus*, *Eutocius Aſcalonita*, *Boetius*, *Campanus*, & alij: noſtro verò & Proavorum ævo, *Nicolaus Cuſanus Cardinalis*, *Ioannes Regiomontanus*, *Orontius Delphinæus*, *Iacobus Peletarius*, multique poſt illos, quorum nomina referre non eſt opus. Cæterum etſi inter omnes quos dixi magnus Archimedes Cyclometricum negotium maximè promoverit, haud ſatis tamen elaboratam fuiſſe ipſius Cyclometriam, quotquot eum celebres Geometræ ſequuti ſunt, ad unum omnes iudicarunt. Hinc factum eſt, quod qui poſt ipſius tempora ingenio & Matheſios ſcientia inſignes fuerunt, vires omnes intenderint, vt Cyclometriam Archimedæa ἀκριβεστέρην darent. Ego verò etſi minimus ſim omnium quos dixi, audeo tamen in Cyclometricam arenam deſcendere, & polliceri, Cyclometriam quam nunc profero in lucem, Veritati & Geometriæ principijs magis eſſe conſentaneam,

quàm, Geometrarum qui nos præceſſerunt. Quod tamen non arroganter, ſed pro rei veritate ingenuè dictum eſſe, in ſequentibus, Deo volente, ſatis ſuperque evincam.

2. *In circulo ad benè metiendùm duo proponuntur, circuli ambitus, & area.*

Tria in circulo conſiderantur, centrum, peripheria, ſuperficies, vel area. Centrum verò quia puncti locum obtinet, magnitudinis eſt expers. Peripheria verò & ſuperficies, quia magnitudines ſunt, ſub menſuram cadunt; vtraque igitur in circulo ad benè metiendum proponitur.

PORISMA.

Itaque Cyclometria duabus partibus abſoluitur, ambitus circuli dimenſione & areæ.

Poriſmatis conſequentia manifeſta eſt. Quia enim in circulo duo tantùm ad benè metiendum proponuntur, ambitus circuli & area, neceſſe eſt Cyclometriam duabus tantùm partibus abſolvi, Dimenſione ambitus circuli & areæ. Quare de iſtis ſigillatim agendum eſt.

3. *Ambitum circuli dimetiri, eſt non modò rectam deſcribere cuiuſvis circuli propoſiti peripheriæ æqualem, & cuicunque rectæ datæ æqualem circuli peripheriam; ſed rationemquoque explicare quam inter ſe habent peripheria cuiuſvis circuli dati & diameter.*

Ambitus

Ambitus circuli dimenſio vel Geometricè inſtituitur, vel Arithmeticè. Si Geometricè, oportet rectam lineam deſcribere circuli propoſiti peripheriæ æqualem, vel rectæ datæ æqualem circuli peripheriam. Sin Arithmeticè, definienda eſt ratio, quam inter ſe habent peripheria data & diameter. Archimedes vtrumque facere conatus eſt. Nam 18. περὶ ἑλίκων rectam lineam ducere inſtituit circuli dati peripheriæ æqualem. Secunda verò propoſitione περὶ κύκλου μετρήσεως, cuiuſlibet circuli peripheriæ rationem ad diametrum definire tentat. Quare & nobis utrumque eſt præſtandum.

4. *Si peripheriæ ſinus aut tangens, ad dimidiæ peripheriæ ſinum aut tangentem fuerit, vt peripheria ad peripheriam dimidiam, peripheria, ſinus, tangens, inter ſe æquales erunt.*

Sinus & tangentes peripherijs æquales voco, non qui abſolutè æquales ſunt, ſed qui æqualitatem habent, ſaltem in dato circulo, vel circulis dato circulo minoribus. Abſolutè enim nullus ſinus aut tangens peripheriæ ſuę eſt æqualis. Nam quia omnis inſcripta minor eſt ſua peripheria, & circumſcripta omnis maior, oportet etiam ſemiſſes inſcriptarum, id eſt ſinus peripherijs ſuis eſſe minores; & circumſcriptarum ſemiſſes, hoc eſt tangentes ijſdem maiores. Hipotheticè verò ſinus & tangens arcui ſuo æqualis eſt, quando eorum diſcrimen nullum oſtendi poteſt in dato circulo. Nam vt acutiſſimus Geometrarum noſtri ſeculi *Nicolaus Copernicus* annotavit lib. Revolut. 1. cap. 12. problemate ultimo, inſcriptæ, adeoque & ſinus & tangentes, per continuam biſectionem peripheriarum tendunt ad æqualitatem, tandemque ad extremum circuli contactum æquales fiunt acſi una linea eſſent.

Dico igitur peripheriam, ſinum, tangentem eſſe inter ſe æquales, ſi

peripherię ſinus vel tangens ſit ad ſinum vel tangentem peripheriæ dimidiæ, vt peripheria ad peripheriam dimidiã. Nam ſi inæquales eſſent, etiam per demõſtrata Ptolemæi libro μεγάλ. συντάξ. 1. cap. 9. eſſent diſproportionales. Atqui ex hypotheſi proportionales ſunt, ergo etiam inæquales. Nam proportionem hîc ſemper ſequitur æqualitas, & inæqualitas diſproportionem. Illuſtre, exemplum ſubminiſtrat Canon Sinuum & Tangentium in peripherijs grad. o. 1ó, & grad. o. ′5. Illius enim & ſinum & tangentem eundem exhibet particul. 29088, huius verò particul. 14544, in menſura radij 10000000.

Sunt autem hi ſinus & tangentes peripherijs ſuis primum proportionales. Nam peripheria grad. o 10, ſe habet ad peripheriam grad. o. ′5, vt ſinus vel tangens 29088, ad ſinum vel tangentem 14544.

Secundò ijdem ſinus tangentibus ſuis æquales ſunt. Nam peripheriæ grad. o. 1 ó, idem eſt ſinus & tangens particul. 29088; idemque eſt ſinus & tangens peripheriæ grad. o. ′5. particul. 14544.

Tertiò ij ipſi Sinus & Tangentes peripherijs ſuis æquales ſunt. Quia enim ſinus tangentibus ſuis æquales ſunt, oportet etiam peripherijs ſuis æquales eſſe, quæ tangentibus abſolutè ſunt minores. Item quia tangentes ſinibus æquales ſunt, neceſſe eſt peripherijs ſuis quoque æquales eſſe, quæ ſinibus ſuis abſolutè ſunt maiores. Itaque peripheria, ſinus, tangens, inter ſe æquales ſunt, cum peripheriæ ſinus vel tangens eſt ad ſinum vel tangentem, peripheriæ dimidiæ, vt peripheria ad peripheriam dimidiam. Quod erat demonſtrandum.

5. *Si dati circuli quadrans per biſectionem in quotvis partes æquales dividatur, radiuſque erectus in partes æquales totidem; & a puncto diviſionis radij ultimo, per diviſionis quadrantis punctum ultimum recta ducatur in ultimi arcus tangentem;*

abſcindet

abſcindet hæc ex dicta tangente tangentem arcui quadrantis ultimo æqualem.

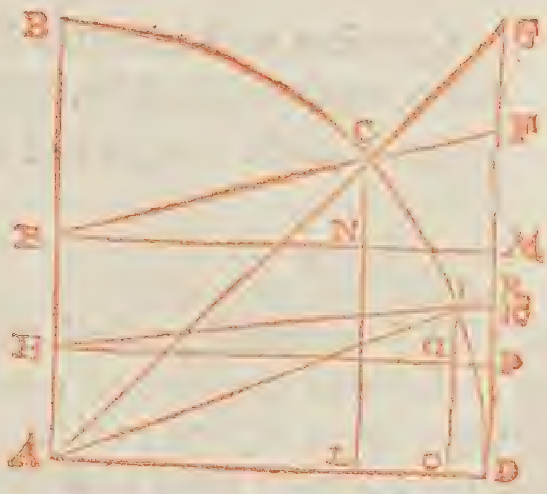
Hoc Theorema totius Cyclometriæ fundamentum continet. Quare perſpicuè explicari, accuratéque demonſtrari debet.

Datum itaque circulum appello, cuius radius in certa menſura datus eſt, puta 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000, vel quacunque alia.

Vltimum arcum Quadrantis dico, qui peripheriæ Quadrantis, vel ſemel, vel quoties libet, biſectæ, eſt ultimus.

Denique rectam ultimo Quadrantis arcui æqualem dico, non quæ talis eſt in omni circulo, ſed ſaltem in dato.

Eſto jam in adiuncto ſchemate Quadrans circuli A B C D, cuius peripheria B C D & radius erectus A B biſecentur, ille in C, hic in E; ducaturque ab E biſectionis radij puncto, per C biſectionis Quadrantis punctum recta E C F in D G tangentem ultimi arcus D C. Dico E C F ſecantem abſcindere ex tangente D G, tangentem D F, æqualem ultimo quadrantis arcui D C.



Demonſtratio perſpicua erit ſi ſemiradius A E biſecetur in H, & D C ſemiquadrans in I, & ex puncto H per punctum I ducatur recta H I K in tangentem D G. Hæc enim quia tangentem D F abſciſſam biſecabit in K, erit D F ad D K, vt peripheria D C ad peripheriam dimidiam D I, adeoque per præmiſſum elementum, D F tangens abſciſſa, æqualis erit ultimo arcui D C, & illius ſemiſſis D K

huius ſemiſſi D I. Quorum veritas cum in numeris ſit maximè conſpicua, ſubijcio ſequentem calculum.

Sit A B radius particul 10, vel 100 (libet enim metiri circulum, omnium qui dari poſſunt minimum) eritque A E ſemiradius particul. 50, & C D ſemiquadrans grad. 45, quorum B C D totus quadrans eſt 90. Demittatur quoque perpendicularis C L ex C termino arcus D C in radium A D; erit hæc ſinus rectus arcus D C particul. 70, qualium A D radius eſt 100, & A L vel E N ſinus complementi itidem particul. 70. Præterea ex E in tangentem D F ducatur recta E M parallela A D, quæ C L ſecet in N; tandemque

auferatur ex C L 70.
L N id eſt A E 50.
eritque reſidua N C 20.

Quoniam verò triangula E M F & E N C ſunt ſimilia, propter rectos angulos ad M & N, communem ad E, per 4^{m} Sext. Euclidis eſt,

Vt E N 70, ad N C 20, ita E M id eſt A D 100 ad M F $28\frac{6}{10}$ proxime. cui
ſi addas D M 50
componitur D F $78\frac{6}{10}$

D F itaque eſt particul. $78\frac{6}{10}$ qualium A B radius eſt 100. Definienda deinceps eſt quantitas D K in eadem menſura radij. Quia igitur A E eſt particul. 50, ſemiſſis eius A H eſt particul. 25. Item quoniam arcus C D eſt grad. 45, eius dimidius D I eſt grad. $22\frac{1}{2}$, eiuſque ſinus rectus I O particul. $38\frac{2}{10}$ in menſura radij 100, & complementi ſinns A O id eſt H Q $92\frac{3}{10}$

Subducatur verò & hic ex I O $38\frac{2}{10}$
Q O id eſt A H 25
reliqua erit Q I $13\frac{2}{10}$

Itaque per 4 Sexti Euclidis vt ſupra

Vt H Q $92\frac{3}{10}$ ad Q I $13\frac{2}{10}$, ita H P 100 ad P K $14\frac{3}{10}$. Cui ſi
addas D P 25
Componitur D K $39\frac{3}{10}$

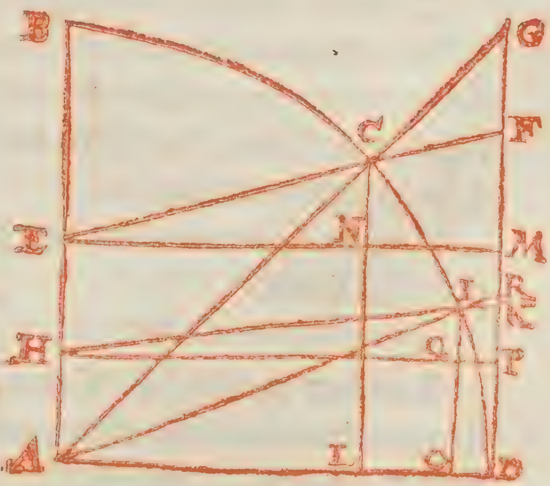
Hinc autem manifeſtum eſt rectam H I K biſecare D F in K; Eſt enim

Vt D F $78\frac{6}{10}$ ad D K $39\frac{3}{10}$, ita D C arcus grad. 45 ad D I arcus grad. $22\frac{1}{2}$. Quare per præcedens elementum recta D F æqualis eſt arcui D C, & recta D K arcui D I, in quadrante A B D, cuius radius datus eſt particul. ſolummodo 100. Quod erat demonſtrandum.

Et hæc quidem eſt Theorematis noſtri demonſtratio, adeo firma, vt nulla eius particula cum ratione poſſit convelli. Vt tamen ipſius veritas manifeſtior reddatur, ſubijcio plura exempla, ex quibus apparebit, quod in vno oſtenſum fuit, verum eſſe in omnibus.

Secundum exemplum ex magno
Canone Rhetici.

Retenta ſuperiore diagrapha, eſto radius AB particul. 1000000000, & A E pars eius vltima $\frac{1}{512}$, earumdem 1953125. Sit etiam arcus D C $\frac{1}{512}$ pars Quadrantis B C D, grad. 0. 10. 32. 48. 45, qualium B D Quadrans eſt 90. Detur quoque ex magno Canone Rhetici C L ſinus rectus D C particul. 3067956, quarum radius A B eſt 1000000000, & complementi ſinus E N 99999 5293.



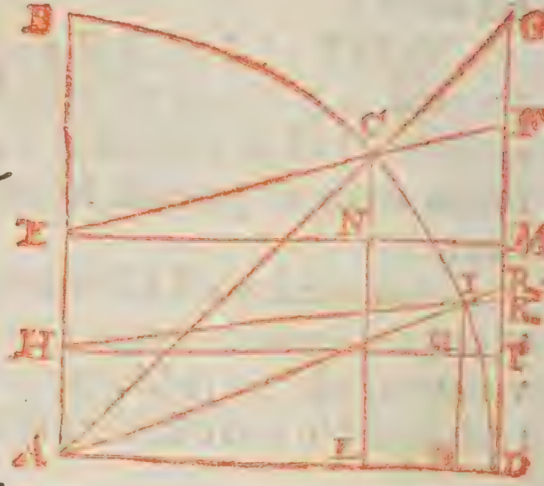
Ablato primum ex C L 3067956
Vltima parte radij L N 1953125

relinquitur N C 1114831

Vnde per 4 Sexti Euclidis
Vt EN 999995293 ad NC 1114831,
ita EM 10000000000 ad MF 1114836.
cui ſi addas vlt. part. rad. DM 1953125

Erit D F 3067961

Biſera iam A E 1953125, & arcum D C grad. 0 10 32 48 45, erit A H $976562\frac{1}{2}$ & D I grad. 0 5 16 24 $22\frac{1}{2}$, eiuſque rectus ſinus I O 1533980, & complementi H Q 999998823.



Porro & hic ex I O 1533980
ſubducatur A H $976562\frac{1}{2}$

reliqua erit Q I $557417\frac{1}{2}$

Quamobrem per 4^m Sexti Euclidis

Vt H Q 999998823 ad Q I $557417\frac{1}{2}$
ita H P 1000000000, ad P K 557418. Cui
ſi addas D P $976562\frac{1}{2}$

Erit D K $1533980\frac{1}{2}$.

Vnde iterum manifeſtũ eſt rectam H I K biſecare D F in K; eſt enim Vt D F 3067961 ad D K $1533980\frac{1}{2}$ ita arcus D C ad arcum D I.

Quamobrem per præcedens elementum, D F eſt æqualis D C, & D K eſt æqualis D I. Quod erat oſtendendum.

Cęterum ne quis exiſtimet rem aliter ſe habere in radijs maioribus, addam unum atque alterum exemplum radiorum maiorum. Vtque ἐπιλογισμὸς expeditior ſit, tum in ſequentibus exemplis, tum in reliquis omnibus, præmitto tres Canones, quorum magnus eſt uſus in Cyclometrico calculo.

Primus Canon continet continuas διχοτομίας radij vaſtiſſimi, viz. particularum.

100000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,0.

Exhibet autem hic Canon in ima parte, radij particulas; in ſiniſtro margine biſectionis numerum, hoc eſt, quoties radius biſectus ſit; in area communi, particulas vltimæ partis radij.

Canon

Canon continuæ διχοτομίας *radij qui ponitur particularum.*

100000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,0.

1	5
2	25
3	125
4	625
5	3125
6	1562,5
7	781,25
8	390,625
9	195,3125
10	97,65625
11	48,82812,5
12	24,41406,25
13	12,20703,125
14	6,10351,5625
15	3,05175,78125,
16	1,52587,89062,5
17	76293,94531,25
18	38146,97265,625
19	19073,48632,8125
20	9536,74316,40625,
21	4768,37158,20312,5
22	2384,18579,10156,25
23	1192,09289,55078,125
24	596,04644,77539,0625
25	298,02322,38769,53125,
26	149,01161,19384,76562,5
27	74,50580,59692,38281,25
28	37,25290,29846,19140,625
29	18,62645,24923,09570,3125
30	9,31322,57461,54785,15625,

1 00000,00000,00000,00000,00000,00000,

Reliquum præcedentis Canonis.

31	4,65661,28730,77392,57812,5
32	2,32830,64365,38696,28906,25
33	1,16415,32182,69348,14453,125
34	58207,66091,34674,07226,5625
35	29103,83045,67237,03613,28125,
36	14451,91522,83668,51806,64062,5
37	7275,95761,41834,25903,32031,25
38	3637,97880,70917,12951,66015,625
39	1818,98940,35458,56475,83007,8125
40	909.49470,17729.28227,91503,90625,
41	454,74735,08864,64118,95751,95312,5
42	227,37367,54432,32059,47875,97656,25
43	113,68683,77216,16029,73937,98828,125
44	56,84341,88608,08014,86968,99414,0625
45	28,42170,94304,04007,43484,49707,03125
46	14,21085,47152,02003,71742,24853,515625
1	00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,000000,

In exemplo,ſi detur radius particul. 100000,00000,00000,00000,00000,000,ultima pars radij eſt 37252,90298,46191,40625.numerētur enim in ima parte Canonis circuli 28,& à poſtremo circulo aſcendatur directè ad numerum ultimum, erit hic numerus vltimus numerus poſtremæ partis radij, viz. 37252,90298,46191,40625. Numerus autem 28 in ſiniſtro margine, vltimæ parti radij reſpondens, indicat quoties radius datus biſectus ſit, nimirùm viceſies & octies.

Item ſi detur radius particul. 100000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,0, vltima pars radij eſt, 14210,85471,52020,03717,42248,53515,625. Nam ſi & hîc in ima parte Canonis, circuli 46 numerentur ab unitate radij, & ab ultimo circulo ſurſum aſcendatur directè ad ultimum numerum, erit hic numerus ultimæ partis radij, numeruſque 46 in ſiniſtro Canonis margine, docet quoties radius ſit biſectus, viz. quadrageſies & ſexies. Et hic quidem eſt primus Canon; ſequitur alter.

Canon

Canon continuæ διχοτομίας *peripheriæ Quadrantis.*

1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432

Hic Canon exhibet continuam biſectionem peripheriæ Quadrantis, à prima biſectione vſque ad quadrageſimā ſextā. Licet autem ex hoc Canone, vel uno intuitu cognoſcere quota pars Quadrātis ſit ultimus arcus ex continua biſectione factus. Numerus enim in ſiniſtro margine oſtendit quoties datus quadrās ſit biſectus: at qui in area ſe offert, docet quota pars Quadrantis ſit arcus à biſectione vltima factus.

In exemplo detur peripheriæ Quadrans, cuius radius ſit particul. 100000,00000,00000,00000,00000,000; Ex ſuperiori Canone conſtat (vti etiam ex numero circulorum radij) vltimam partem radij fieri ex biſectione ipſius radij, viceſies & octies continuata. Atqui & ultimus Quadrantis dati arcus fit ex biſectione Quadrantis toties continuata. Quare vt numerus 28 in præmiſſo Canone præbet partem vltimam radij; ita in præſenti Canone vltimum arcum Quadrantis nimirum $\frac{1}{268435456}$. Qualium itaque peripheriæ datus Quadrans particularum eſt 268435456, Vltimus quadrantis arcus eſt vna particula.

Eodem modo vltimus arcus peripheriæ Quadrantis, cuius Radius ponitur

Reliqnum præcedentis Canonis.

26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824
31	2147483648
32	4294967296
33	8589934592
34	17179869184
35	34359738368
36	68719476736
37	137438953472
38	274877906944
39	549755813888
40	1099511627776
41	2199023255552
42	4398046511104
43	8796093022208
44	17592186044416
45	35184372088832
46	70368744177664

particularum 100000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 000000, ex præſenti Canone obtinetur $\frac{1}{70368744177664}$. Superior enim Canon (vti & numerus circulorum radij) docet biſectionem Radij quadrageſies & ſexies eſſe continuandam. At vt numerus 46 in præmiſſo Canone dat vltimam partem Radij; ita in præſenti Canone dat vltimum arcum Quadrantis, viz. $\frac{1}{70368744177664}$. Qualium itaque Quadrans circuli datus eſt particularum 70368744177664, arcus quadrantis vltimus eſt particula vna.

Tertius Canon continet ſubtenſas complementorum arcuum ad ſemicirculum, qui ex continua biſectione Quadrantis oriuntur, idque in menſura Radij vaſtiſſimi particul. 100000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 0. Quem Canonem ſumma induſtria, atque indefeſſo labore ſupputavit logiſtarum noſtri ſeculi Princeps *Ludolphus à Collen*, eundemq; abhinc octennium nobiſcum perhumaniter communicavit. Licet autem ex ſubtenſis iſtis, citra calculi moleſtiam ſupputare peripheriarum ſinus, quæ ex continua Quadranris biſectione proveniunt, in menſura radij 100000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 0000. ſaltem ad biſectionem Quadrantis 46^{m}. Tot enim ſubtenſas Canon exhibet; neque plures deſiderantur, reſpectu Canonum præmiſſorum, qui

qua

quadrageſimam ſextam Radij & Quadrantis biſectionem non tranſcendunt.

Ratio autem ſubtenſarum hæc eſt. Prima ſubtenſa eſt peripheriæ Quadrantis. Secunda differentiæ $\frac{1}{2}$ peripheriæ Quadrantis & ſemicirculi. Tertia differenriæ $\frac{1}{4}$ peripheriæ Quadrantis & ſemicirculi; atque ita deinceps vſque ad quadrageſimam ſextam, quæ eſt ſubtenſa differentiæ $\frac{1}{70368744177664}$ peripheriæ Quadrantis & ſemicirculi.

Primæ autem ſubtenſæ & Diametri differentiæ latus quadratum eſt ſubtenſa $\frac{1}{2}$ peripheriæ Quadrantis; itaque ſemiſſis eius eſt ſinus $\frac{1}{4}$ Quadrantis. Secundæ ſubtenſæ & diametri differentiæ latus quadratum eſt ſubtenſa $\frac{1}{4}$ peripheriæ Quadrantis, & ſemiſſis eius eſt ſinus $\frac{1}{8}$ Quadrantis. Tertiæ ſubtenſæ & Diametri differentiæ latus quadratum eſt ſubtenſa $\frac{1}{8}$ peripheriæ Quadrantis, & ſemiſſis eius eſt ſinus $\frac{1}{16}$ Quadrantis, atque ita deinceps. Vnde manifeſtum eſt quomodo ex Canone ſubtenſarum cuiuſvis arcus ultimi & complementi ſui ſinus inveſtigandi ſint. Primùm ex numero circulorum Radij dati, vel ex præmiſſis Canonibus colligendum eſt, quota quadrantis biſectio det ultimum quadrantis dati arcum. Deinde cum numero quoto ingredi oportet Subtenſarum Canonem, & ſubtenſam ſumere quæ quoto numero reſpondet. Huius ſemiſſis eſt ſinus complementi arcus ultimi dati. Latus verò quadratum differentiæ ſubtenſæ immediatè præcedentis & Diametri, eſt ſinus rectus ipſius arcus ultimi. Ecce autem Canonem ipſum.

D Canon

Canon ſubtenſarum arcuum peripheriæ

Quadrantis continuè biſectæ.

PARTICVLÆ DIAMETRI.

200000000000000000000000000000000000000000000000000000000

1	141421356237309504880168872420969807856967187537694807
2	184775906502257351225636637879357657364483325172728497
3	196157056080646089825236447226847807394786746178667219
4	199036945334439377248967390621895984315094973745971412
5	199759091241034478542954320951820138888640722940922373
6	199939763739240844023153129933234439370012216251545928
7	199984940367828908184329298239276644870121293760443566
8	199996235056520228531398087545713543234783450188867018
9	1999990587619152343023160251400239799105975267244375308
10	1999997646903403819858051420343052038096535845779530078
11	1999999411725764438320456435477531354232527798698603203
12	1999999852931435702289462961414775713896402311377845532
13	1999999963232858587616693830805819429010152102485560705
14	1999999990808214625781943866279212297917788606378905647
15	1999999997702053655125346615589108216801074832388564246
16	1999999999425513413698827944437283552178178915836570505
17	1999999999856378353419550191767700980520960666219031603
18	1999999999964094588354565248295568214759278374992551601
19	1999999999991023647088621768345994648883029202930628122
20	1999999999997755911772154033103505073007698443821045219
21	1999999999999438977943038429589439168904036019000060424
22	19999999999999859744485759602479457473516421086293467729
23	19999999999999964936121439900312495473459750637897030419
24	19999999999999991234030359975058913312432477910669911536
25	199999999999999997808507589993763527668362340742051587894

Reliquum

Reliquum precedentis Canonis.

26	199999999999999452126897498440806875856474014516347312
27	1999999999999999863031724374610197028886986555441481278
28	1999999999999999965757931093652548964091925892098639953
29	199999999999999999914394827734131372227023676352051762
30	1999999999999999999785987069335284304530553556795974925
31	199999999999999999946467673338321076061073491555741355
32	1999999999999999999866241918334580269010795566786232066
33	1999999999999999999665604795836450672524193413151390062
34	199999999999999999991640119895911266813087363429946077
35	1999999999999999999997910029973977816703270748863809101
36	1999999999999999999999477507493494454175817618966347436
37	1999999999999999999999869376873373613543954400475986557
38	19999999999999999999999967344218343403385988599852396620
39	199999999999999999999999991836054585850846497149946436654
40	199999999999999999999999997959013646462711624287485567757
41	19999999999999999999999999489753411615677906071871326851
42	1999999999999999999999999998724383529 919476517967827644
43	1999999999999999999999999999968109588 5979869129491956656
44	1999999999999999999999999999992027397 56494967282372989148
45	1999999999999999999999999999998006845 2641237418205932472 86
46	19999999999999999999999999999995017123 16030935455148311821

Hic eſt Subtenſarum Canon; ad cuius uſum declarandum, addo unum atque alterum exemplum. Eſto radius circuli Quadrantis dati particul. 100000,00000,00000,00000,00000,000, eiuſque arcus ultimus ex ſecũdo Canone $\frac{1}{268435456}$ Quadrãtis, reſpondens biſectioni radij & Quadrantis 28ª, & numero circulorum radij. Ex Canone ſubtenſarum datur ſubtenſa 28ª partic. 199999,99999,99999,96575.79310,93652,548$\frac{9}{10}$ quarum diameter eſt 200000,00000,00000,00000,00000,00000,0000. Eius ſemiſſis 99999, 99999, 99999, 98287 —— eſt ſinus complementi ultimi arcus.

Subten-

Subtenſa verò immediatè præcedens eſt particul. 199999, 99999, 99999, 86303, 17243, 74610, 196 $\frac{9}{10}$, Cuius & Diametri differentia eſt particul. 13696, 82756, 25389, 803 $\frac{1}{10}$, huiuſque latus quadratum particul. 11703, 34463, 41372, 77380, ſubtenſa eſt arcus dupli, Ergo huius ſemiſſis particul. 58516, 72317, 06863, 8690 eſt ſinus rectus arcus ultimi.

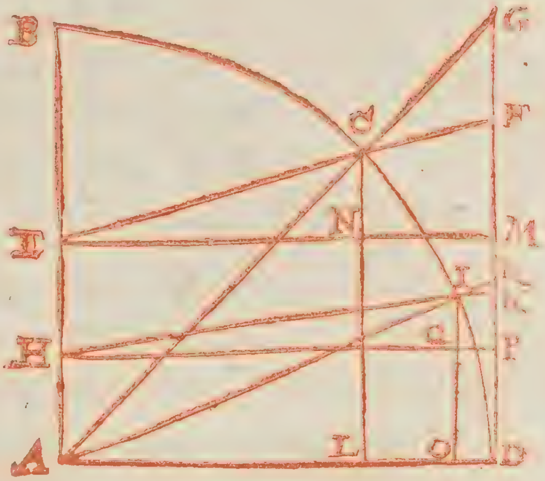
Aliud exemplum, ſit dati Quadrantis radius particul. 100000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, eiuſque ultimus arcus ex ſecundo Canone $\frac{1}{35184372088832}$ Quadrantis, reſpondens biſectioni Quadrantis 45. & numero circulorum radij. Detur quoque 45 Subtenſa ex ſubtenſarum Canone particular. 199999, 99999, 99999, 99999, 99999, 98006, 84926, 41237, 41820, 59324, 7286, quarum Diameter eſt 200000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 0000. huius ſemiſſis particul. 99999, 99999, 99999, 99999, 99999, 99003 eſt—ſinus complementi arcus ultimi. Subtenſa verò proxime præcedens eſt particul. 199999, 99999, 99999, 99999, 99999, 92027, 39705, 64949, 67282, 37298, 9148; cuius & Diametri differentia eſt particul. 79726, 02943, 50503, 27176, 27010, 852; & differentiæ latus quadratū particul. 89289, 43354, 90200, 76626, 66856, 7129, eſt ſubtenſa arcus dupli. Ergo ſemiſſis huius 44644, 71677, 45104, 88313, 33428, 3564 eſt ſinus rectus arcus ultimi.

Et hi quidem Canones ſunt, quorum adminiculo, licet Theorematis noſtri veritatem experiri in Radijs maioribus. Nos autem contenti erimus duobus exemplis, nimirū radij particul. 100000, 00000, 00000, 00000, 00000, 000, quo etiam Ludolphus à Collen vſus eſt, & radij particul. 100000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, quo nos primum utemur.

Tertium

Tertium exemplum radij particul.

100000,00000,00000,00000,00000,000.



Repetatur præcedens diagramma, ſitque A B radius particul. 100000, 00000, 00000, 00000,00000,000, & A E vltima pars radij earundem 37252,90298,46191,40625 : Item D C arcus vltimus Quadrantis $\frac{1}{268435456}$, & C L ipſius ſinus rectus in menſura Radij particul. 58516, 72317,06863,8690 —— & E N complementi ſinus earundem 99999, 99999,99999,9828 —
Subducatur primum ex ſinu

C L	5851672317068638960
L N	37252902984619140625
N C erit	21263820186067242627

Quare per 4^m Sexti Euclidis

Vt	E N	99999999999999999828	
ad	N C	21263820186067242627	
Ita	E M	100000000000000000000	
ad	M F	21263820186067224664.	Cui ſi
addas	D M	37252902984619140625	
Erit	D F	58516723170686387265	

Biſecentur porrò A E & arcus D C, eritque A H 186264514923 095703125, Item D I $\frac{1}{536870912}$ Quadrantis, eiuſque rectus ſinus I O 2925836158534319360, & complementi ſinus H Q 99999999999 9999957 ——

Auferatur verò & hîc ex ſinu	I O,	2925836158534319360
	A H	1862645149230957031 25
reliqua erit	Q I	1063191009303362328

E Quare

Quare per 4^{m} Sexti Euclidis

Vt H Q 99999999999999999571
ad Q I 1063191009303362328
Ita H P 1000000000000000000000
ad P K 1063191009303362332. Cui ſi
addas D P 1862645149230957031 25

Erit D K 29258361585343193632 5.

Itaque & hîc recta H I K biſecat D F in K. Eſt enim

Vt D F 58516723170686387265,
ad D K 29258361585343193632 5

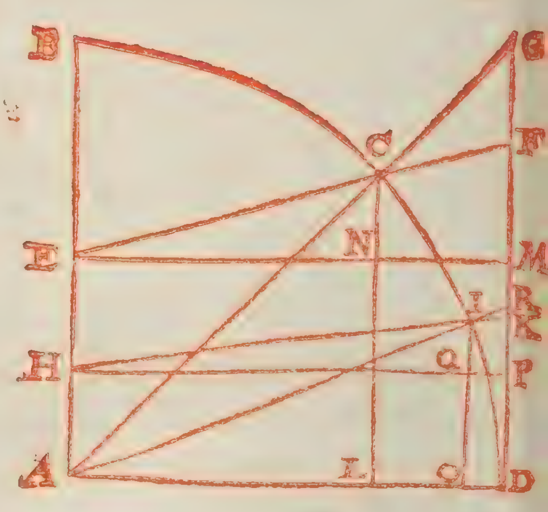
Ita arcus D C ad arcum D I.

Quare per elementum præmiſſum D F eſt æqualis DC, & D K eſt æqualis D I. Quod erat oſtendendum.

Poſtremum exemplum radij particularum

100000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000.

Retineatur & hic ſchema præmiſſum, ſitque A B radius particul. 100000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000; & AE pars radij vltima earundē 28421, 7 943, 04040, 07434, 84497, 07031, 25; item D C vltimus arcus Quadrantis $\frac{1}{35184372088832}$, eiuſque ſinus rectus C L in menſura Radij part. 44644,71677,45104,88313,33428, 3564; & complementi E N 99999, 99999,99999,99999,99999,9900.



Auferatur primùm ex ſinu

C L 44644716774510488313334283564
L N 2842170943040400743484497070312 5

relinquitur N C 1622300734410648087848931 2860

Itaque

Itaque per 4 Sexti Euclidis

Vt E N 999999999999999999999999999900
ad N C 16223007344006480878489312860
Ita E M 1000000000000000000000000000000
ad M F 16223007344106480878489312876. Cui ſi
addas D M 28421709430404007434844970703125

Erit D F 44644716774510488313334283579125.

Divide verò A E & arcum D C in partes duas æquales, erit A H particular. 14210, 85471, 52020, 03717, 42248, 53515, 625; item D I $\frac{1}{70368744177664}$ Quadrantis, eiuſque ſinus rectus I O 22322, 35838, 72552, 44156, 66714, 1787$\frac{9}{10}$, & complementi ſinus H Q 99999, 99999, 99999, 99999, 99999, 9975.

Subducatur verò & hic ex ſinu

I O 2232235838725524415666714178 7$\frac{9}{10}$
A H 14210854715202003717422485351 5625

reliqua erit Q I 811150367205324043924465643 6

Quamobrem per 4 Sexti Euclidis

Vt H Q 99999999999999999999999999975
ad Q I 8111503672053240439244656436
Ita H P 100000000000000000000000000000
ad P K 8111503672053240439244656438. Cui
ſi addas D P 142108547152020037174224853515625

Erit D K 223223583872552441566671417895625.

Ergo & hic recta H I K biſecat D F in K. Eſt enim

Vt D F 44644716774510488313334283579125
ad D K 22322358387255244156667141789562 5

Ita arcus D C ad arcum D I.

Quare per præcedens elementum D F eſt æqualis D C, & D K eſt æqualis D I. Quod erat demonſtrandum.

Atque ita Theorematis noſtri veritas luculenter demonſtrata eſt. Sequuntur iam poriſmata, quæ ex Theoremate haud aliter quam rivuli ex fonte ſuo derivantur: Ex quibus de præſtantia atque utilitate

ipſius Theorematis iudicare promptum erit; Imprimis de multiplici uſu Tangentis abſciſſæ, quę vera eſt τετραγωνίζουσα, veterumq́; τετραγωνιζούσων, totiuſq́; Cyclometriæ fundamentũ unicum. Enimverò hæc ipſa linea cum peripheria ſua affinitatem habet tantam, vt ſi ambitioſæ & rectæ diſcrimen excipias, altera alterius naturam induiſſe videatur. Vt enim peripheria C D maior eſt ſinu ſuo C L, & minor tangente ſua D G; ita etiam tangens abſciſſa D F, maior eſt eodem ſinu C L, & minor tangente D G: idque etiam ita eſt cum peripheria D C, & pars radij A E continuè biſecantur.

Secundò vt peripheria C D eodem modo ſe habet ad peripheriam dimidiam D I, quo pars radij A E ad partem dimidiam A H; ita etiam tangens abſciſſa D F ſe habet ad tangentem abſciſſam D K, vt pars radij A E, ad partem dimidiam A H: & ſic quoque eſt in continuis peripheriæ D C, & partis radij A E biſegmentis. Itaque non eſt dubium quin altera alteri æqualis ſit, ſaltem in dato circulo: nam ſi inæquales eſſent, nequaquam hæc fierent quæ diximus.

Etſi verò etiam ſinus & tangentes circa circuli contactum peripherijs ſuis ſint æquales in dato circulo, quemadmodum 4° Theoremate oſtendimus, magnum tamen eſt inter hos, & tangentem abſciſſam diſcrimen. Nam tangens abſciſſa peripheriæ naturam prorſus refert, vt modo probavimus: ſinus autem & tangentes referre eam nunquam poſſunt, quia omnis ſinus abſolutè perepheria ſua ſemper eſt minor, & omnis tangens maior.

Secundò quoniam Sinus & Tangentes ad circuli contactum peripherijs ſuis primùm æquales evadunt in dato circulo, uſum quidem habent in circuli dimenſione quæ fit per numeros, non autem in illa quæ abſolvitur per lineas: ratio eſt, quod eiuſmodi ſinum aut tangentem peripheriæ ſuæ adſcribere non liceat. Contra quia tangens abſciſſa, peripheriæ naturam refert, etiam tunc cum quadrantis dimidij interuallo à puncto contactus diſtat, non modò utrique dimenſioni apta eſt, ſed multò ante diametri & peripheriæ rationem in numeris exhibet, quàm ſinus aut tangens.

Verùm quia hæc aliaque quæ huc faciunt, ex Theorematis noſtri poriſmatibus maximè erunt perſpicua, ſubijcio poriſmata ipſa.

PORIS-

PORISMA I.

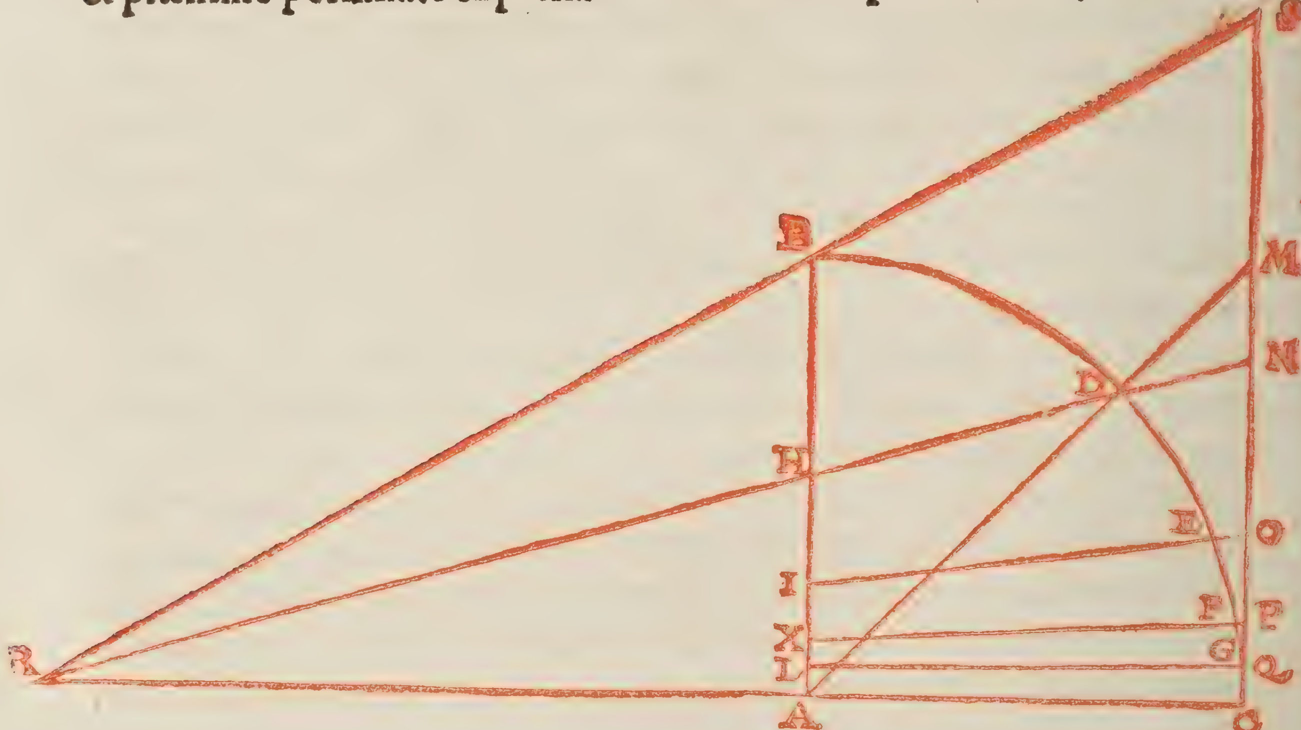
Hinc licet primò cuiuſcunque circuli propoſiti peripheriæ æqualem rectam deſcribere. Quarta enim proportionalis radij parti ultimæ, tangentique abſciſſæ & radio, eſt æqualis circuli propoſiti quadranti, & ipſius quadrupla toti circulo.

Hic primus eſt uſus tangentis abſciſſæ, viz. quod ipſius beneficio, cuivis circulo propoſito æqualis recta deſcribatur. Cuius Problematis κατασκευὴ à veteribus diu multumque eſt quæſita, nunquam inventa. Dinoſtratus enim huic fini excogitaverat τετραγωνίζουσαν & Archimedes ordinatam ἕλικα vtramque tamen lineam inutilem, quod ex ipſorum principijs deſcribi non poſſet. De Dinoſtratæa linea res nota eſt ex Sporo, Pappo, atque alijs; & à nobis infra, volente Deo, demonſtrabitur.

At de Archimedæa conſtabit, ſi δοκιμασία inſtituatur per numeros. Nam ſi radius circuli, in quo prima helicis converſio abſolvitur ſtatuatur particul. 100000, recta eidem peripheriæ æqualis, erit particul. 628318½, vti ſuo loco oſtendetur. Cùm verò per 18m Archimedis περὶ ἑλίκων recta terminum volutæ contingens, abſcindat ab infinita, quæ ex circuli centro per primum quadrantis terminum ducitur, rectam eidem circulo æqualem; neceſſe eſt eandem lineam abſciſſam eſſe earundem particul. 628318½, angulumque quem linea abſciſſa ſubtendit, ex Canone Tangentium grad. 80 57 25. Iam ſi ex Archimedæis principijs recta ſit deſcribenda circuli propoſiti peripheriæ æqualis, oportet contingentem ita ducere, vt abſciſſa hunc ipſum angulum exactè ſubtendat. Nam ſi angulum ſubtendat uno tantum primo ſcrupulo minorem, abſciſſa linea erit particul. 626654 multo minor iuſta: ſin angulum ſubtendat uno ſcrupulo maiorem, eadem particul. erit 629006, iuſta multò maior. Atqui cùm ex Archime-

chimedæis principijs, contingens ſic duci nequeat vt dictum angulum exactè ſubtendat, utique nec recta per eam obtineri poteſt, propoſitæ peripheriæ æqualis.

Nos itaque primi aperimus viam cuicunque circulo propoſito, æqualem rectam deſcribendi. Vetus enim illa, quæ utitur ratione diametri & peripheriæ tripla & ſeſquiſeptima, nec veritatis ſuæ munimentum habet à ſe, nec omni circulo propoſito convenit, ſed tantum omnium qui dari poſſunt minimo. Noſtra econtra & robur veritatis à ſe accipit, & cuivis circulo propoſito dimetiendo apta eſt; Itaque ea ipſa eſt quæ tot ſeculis, totque à Geometris ſummo ſtudio ac labore quæſita fuit, & nunc primùm, ſummo Dei beneficio eſt inventa, & præmiſſo poriſmate expreſſa. Eſt autem ipſius ἀπόδειξις hæc.



Eſto circuli propoſiti quadrans A B C, cuius peripheria B C biſecetur in D, radiuſque A B in H: & à puucto biſectionis radij H per biſectionis punctum Quadrantis D ducatur recta H D N in tangentem Quadrantis dimidij D M, quæ ex tangente C M abſcindat tangentem C N. Dico quartam proportionalem ultimæ parti radij A H, tangenti abſciſſæ C N, & radio A B, æqualem eſſe quadranti A B, ſi

AB, ſi radius ponatur particul. duntaxat 10, vel 100, vtpote circuli omnium minimi. Nam per demonſtrata Pappi eſt, Vt AH vltima pars radij ad DC ultimum arcum Quadrantis, ita AB radius ad BC Quadrantem. Quoniam autem per Theorema præmiſſum tangens abſciſſa CN eſt æqualis ultimo arcui DC; Per 7 Quinti Euclidis eſt, Vt AH vltima pars radij ad CN tangentem abſciſſam vltimo arcui Quadrantis æqualem, ita AB radius, ad quartam proportionalem, Quadranti BC æqualem. Inventâ igitur quarta proportionali vltimæ parti radij AH, tangenti abſciſſæ CN & radio AB, inventa quoque eſt recta circuli propoſiti Quadranti BC ęqualis, quæ poſtulatur.

Invenitur autem ea promptè, ſi recta HDN, & radius AC continuentur, dum ſeſe interſecent in R; & ex R per B terminum radij AB recta RBS ducatur in tangentem CS. Tunc enim per 10ᵐ Sexti ſecatur tangens CS eodem modo in N, vt radius AB in H, adeoque AH AB ſunt proportionales CN CS & per mutando, AH CN, proportionales ſunt AB CS. Itaque Tangens CS eſt quarta proportionalis vltimæ parti radij AH, tangenti abſciſſæ CN, & radio AB; eademque eſt æqualis Quadranti BC, & ipſius quadrupla toti circulo. Deſcripta igitur eſt recta æqualis circulo propoſito. Quod erat faciendum.

Quod ſi verò proponatur circulus maior, continuare oportet peripheriæ Quadrantis & radij biſectionem, pro circuli dati magnitudine, atque vltimo arcui æqualem tangentem abſcindere, & in cæteris procedere vt ſupra; ita enim licebit cuivis circulo propoſito æqualem rectam deſcribere, In exemplo, cùm circulus proponitur minimus, quadrans ipſius BC, & radius AB, in duas quatuorve partes æquales ſecantur, vltimoque arcui CD vel CE æqualis abſcinditur tangens CN, vel CO; atque ita datur CS, æqualis quadranti BC, cum ratione diametri & peripheriæ Archimedæa, tripla & ſeſquiſeptima, quę minimo circulo menſurando ſufficit, non autem maioribus. Verùm ſi circulus proponatur minimo paulò maior, oportet ipſius quadrantem & radium dividere in partes æquales octo, vltimoque arcui CF abſcindere æqualem tangentem CP; ſic enim datur CS

ęqua-

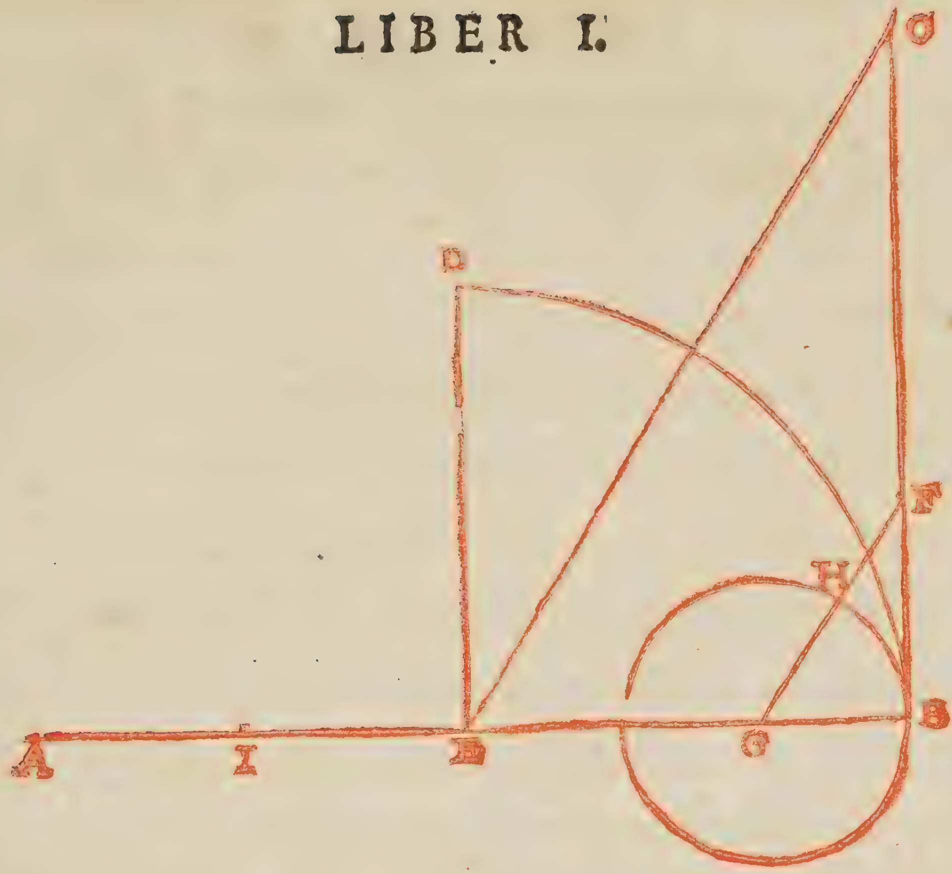
æqualis Quadranti B C, cum ratione diametri & peripheriæ Ptolemaica, quæ media eſt inter triplam ſeſquiſeptimam, & triplã ſuper partientem decem ſeptuageſimas primas. Quod ſi verò & hoc circulo proponatur paulò maior, ipſius quadrans BC & radius AB dividendi ſunt in partes æquales ſexdecim, vltimoque arcui C G. æqualis tangens abſcindenda C Q, hinc enim datur C S æqualis Quadranti B C, cum ratione diametri & peripheriæ ut 10000 ad 31416; qua Viri magni *Georgius Purbacchius*, & *Franciſcus Vieta* ſunt uſi. Licet autem biſectionem peripheriæ Quadrantis & radij hoc modo continuare quoties libet, adeoque cuivis circulo propoſito æqualem rectam ducere. Cuius problematis conſtructio, iam totos bis mille & ſexingentos annos à Magnis Viris quæſita, à nobis primùm, Dei Opt. Max. beneficio, inventa, iam in omnium conſpectum ſiſtitur.

PORISMA II.

Secundò cuivis rectæ datæ deſcribi poteſt æqualis circuli peripheria, ſi prius circuli cuiuſvis quadrãti æqualis recta deſcripta fuerit. Quarta enim proportionalis huic rectæ, radioque circuli, & rectæ datæ quadranti, eſt radius circuli poſtulati.

Hoc poriſma eſt ſuperioris converſum, roburque etiam ſuum à ſuperiore accipit, vti ſequens demonſtratio docet. Sit enim recta A B data, cui æqualem circuli peripheriam deſcribere oporteat; ſitque prius cuiuſvis circuli Quadranti deſcripta æqualis recta, per poriſma præcedens; exempli gratia in noſtro Diagrammate, recta B C æqualis Quadranti D B. Dico quartam proportionalem rectæ B C, radio E B, & A I (quę eſt quarta pars datæ A B) eſſe radium circuli poſtulati. Nam per

demon-



demonſtrata Pappi eſt, vt B C recta Quadranti D B æqualis, ad E B ipſius radium; ita A I (quarta pars A B datæ) æqualis circuli poſtulati quadranti, ad ipſius radium. Inventa igitur quarta proportionali rectæ B C, radio A B, & A I quartæ parti ipſius A B datæ, obtinetur radius circuli ipſi A B datæ æqualis.

Quarta autem proportionalis dicta promptè invenitur, ſi ex B C abſcindatur B F, æqualis A I, rectæque E C parallela ducatur G F. Quia enim triangula E B C & G B F ex fabrica ſunt ſimilia, per 4^m ſexti eſt,

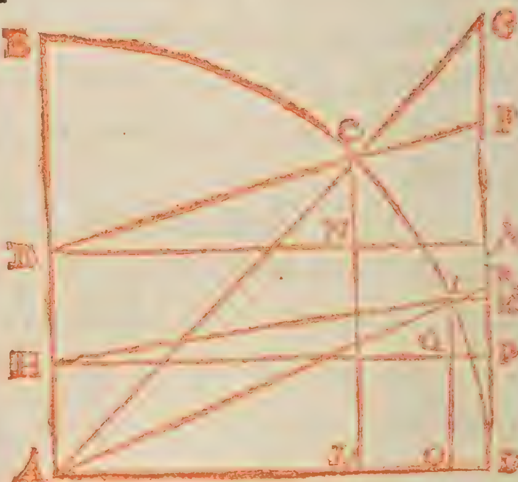
Vt B C ad E B, ita B F ad G B.

Itaque G B eſt quarta proportionalis B C, E B, & B F; eademque eſt radius circuli H B A rectæ A B datæ æqualis. Quamobrem rectę A B datæ deſcriptus eſt circulus H B H æqualis. Quod erat faciendum.

PORISMA III.

Tertiò cuiuſlibet circuli perimeter dari poteſt in data menſura diametri. Nam vt ſinus rectus complementi ultimi arcus eſt ad differentiam ſinus recti eiuſdem arcus & ultimæ partis radij; ita radius ad differentiam perimetri arcus ultimi, & ultimæ partis radij, quæ cum ultima parte radij, componit perimetrum arcus ultimi. Sed vt ultima pars radij eſt ad perimetrum arcus ultimi, ita radius ad Quadrantis circuli dati perimetrum. Ergo huius quadruplus eſt dati circuli perimeter.

Expoſita Dimenſione circuli Geometrica quæ fit per lineas, ſequitur Arithmetica quæ abſolvitur calculo. Huius ſummam complexi ſumus præcedente poriſmate, cuius partes ſunt duæ. Prima calculum proponit perimetri arcus ultimi; Altera Quadrantis perimetri. Vtriuſque fundamentum ex ſequenti demonſtratione manifeſtum eſt. Repetatur diagramma, quo ſupra in demonſtratione Theorematis vſi ſumus; ſitque B C D quadrans circuli, cuius radius ſit datus particul. 100. Quæritur eiuſdem perimeter in data menſura radij. Quia radius A B eſt particul. 100, A H ipſius Quadrans ex fabrica eſt particul. 25: item arcus D I, quarta pars Quadrantis B C D part. 90, eſt earundem $22\frac{1}{2}$; eiuſque



ſinus

ſinus rectus I O particul. $38\frac{2}{10}$ qualium A B eſt 100; & complementi H Q earundem $92\frac{3}{10}$. Ergo I Q differentia ſinus I O, $38\frac{2}{10}$, & Q O vltimæ partis radij 25 eſt $13\frac{2}{10}$. Hinc datur ex præmiſſo Theoremate D K, perimeter arcus ultimi D I, particul. $39\frac{3}{10}$. Nam vt H Q ſinus cõplementi arcus ultimi D I particul. $92\frac{3}{10}$ ad I Q $13\frac{2}{10}$ differentiam ſinus I O & vltimæ partis radij O Q; ita H P 100 ad D K $14\frac{3}{10}$ differentiam perimetri ultimi arcus D K, & ultimæ partis radij D P; quæ cum ultima parte radij D P 25 componit D K perimetrum arcus ultimi $39\frac{3}{10}$.

Atqui per 15 Quinti Euclidis,

Vt A H vltima pars radij 25 ſe habet ad D K perimetrum arcus ultimi $39\frac{3}{10}$, ita A B radius 100 ad perimetrum Quadrantis B C D $157\frac{2}{10}$ cuius duplus $314\frac{4}{10}$ eſt perimeter ſemicirculi, puta ſi radius ſit particul. 100; vel circuli perimeter, ſi radius ſit particul. 50.

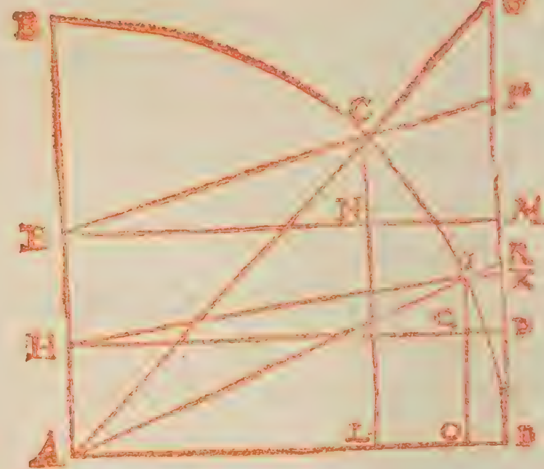
Atque hæc eſt illa diametri & peripheriæ ratio tripla & ſeſquiſeptima, qua Euclides ſeptuaginta quinque annis ante Archimedem uſus eſt; quamque Archimedes duplici, eaque operoſa demonſtratione comprobavit. Nam per regulam auream eſt

Vt 100 ad $314\frac{4}{10}$, ita 7 ad 22.

Quę ipſa quoque invenitur ex prima biſectione Quadrantis BCD in C, & radij A B in E. Tunc enim D F eſt perimeter vltimi arcus D C. Atqui iam ante in primo Theorematis noſtri exemplo oſtendimus perimetrum D F eſſe particul. $78\frac{6}{10}$ fere, quarum A B radius eſt 100; itaque perimeter dupli arcus, id eſt quadrantis B C D eſt earundem $157\frac{2}{10}$, omnibus modis vt ſupra.

Cæterum quia iſta diametri & peripheriæ ratio, non convenit omnibus circulis, ſed tantum minoribus, ſubijcio exempla circulorum maiorum; ex quibus apparebit, quod de minoribus iam demonſtratum eſt, verum eſſe in maioribus omnibus, etiam in vaſtiſſimis.

Secundum exemplum radij particul. 1000.



Repetatur præcedens diagramma, in quo radius A B ſit particul. 1000: & A H vltima pars radij earundem 125, nimirum pars radij octava, & D I vltimus arcus grad. 11 15; eiuſq; ſinus rectus I O ex Canone Sinuum particul. 1950, & complementi H Q 9807, qualium A B radius eſt 10000 (augemus enim radium datum uno circulo, vt ſinus dicti accuratiùs habeantur quod etiam in præmiſſis exemplis fecimus.) Itaque I Q differentia ſinus I O, & ultimæ partis radij Q O eſt 700. Hinc iam eſt ex præcedente Theoremate,

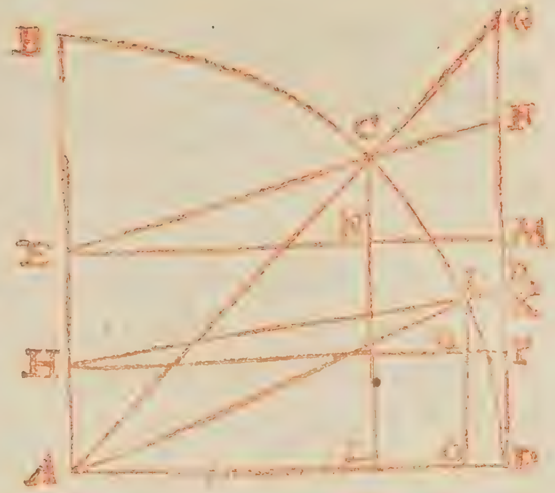
Vt H Q ſinus rectus complementi vltimi arcus 9807, ad differentiam I Q 700, ita H P 10000 ad K P $713\frac{7}{10}$ differentiam perimetri vltimi arcus D K, & vltimæ partis radij D P; Quæ cum ultima parte radij D P 125, componit perimetrum arcus ultimi D K $1963\frac{7}{10}$.

At per 15.m Quinti Euclidis

Vt A H ultima pars radij 125, eſt ad D K perimetrum arcus ultimi $1963\frac{7}{10}$, ita A B radius 1000, ad perimetrum Quadrantis B C D $1570\frac{9}{10}$: Cuius duplus eſt perimeter ſemicirculi, & quadruplus circuli perimeter. Itaque ſemicirculi perimeter eſt particul. $3141\frac{8}{10}$ quarum radius ponitur 1000. Vel ſi diameter ponatur particul. 1000, circuli perimeter eſt earundem $3141\frac{8}{10}$. Ratio autem diametri 1000, ad perimetrum $3141\frac{8}{10}$ eſt media inter triplam ſeſquiſeptimam, & triplam ſuperpartientem decem ſeptuageſimas primas. Quam Ptolemæus accuratiorem eſſe teſtatur, ratione triplâ ſeſquiſeptimâ, qua Euclides & Archimedes vſi ſunt. Vide μεγάλ. συντάξ. librum VI cap. VII.

Verùm quia & hæc ratio tantùm deſervit circulis, quorum diametri in particulas 1000 commodè dividuntur, non autem maioribus, ſubijcio tertium exemplum radij particul. 10000.

Tertium exemplum radij particul. 10000.



Manenre ſuperiore diagrapha; ſit A H ultima pars radij $\frac{2}{16}$, adeoque particul. 625, quarum A B radius eſt 10000: item D I vltimus arcus quadrantis, ſit $\frac{1}{16}$; eiuſque ſinus rectus I O ex Canone Sinuum particul. 9801, & complementi H Q 995 8: qualium A B ponitur 100000: Deníque I Q differentia ſinus I O & ultimæ partis radij Q O particularum 3551. Hinc datur D K perimeter ultimi arcus D I 9818. Nam per præmiſſum Theorema

Vt ſe habet H Q ſinus complementi arcus ultimi 99518, ad differentiam I Q 3551, ita H P 100000 ad K P 3568, differentiam perimetri ultimi arcus D K, & ultimæ partis radij D P, Quæ cum ultima parte radij D P conficit ultimi arcus perimetrum D K 9818.

At per 15 Quinti Euclidis,

Vt A H ultima pars radij 625, ad D K perimetrum arcus ultimi 9818 ita A B radius 1000 ad perimetrum Quadrantis B C D 1570$\frac{8}{16}$. Cuius duplus 31416 proximè, eſt perimeter ſemicirculi, & quadruplus perimeter circuli.

At ſi diameter propoſiti circuli ſtatuatur particul. 10000, perimeter ipſius eſt 31416. Quæ ratio accuratior eſt illa quam Ptolemæus prodidit, Vt 1 ad 3. 8. 30, hoc eſt vt 10000 ad 31418. Vt non ſine cauſa eandem propoſuerit Magnus Vir *Georgius Purbachius* in tractatu ſuo de Sinibus; & Illuſtris Vir *Franciſcus Vieta* eadem vſus ſit in deſcribenda recta circuli dati peripheriæ æquali.

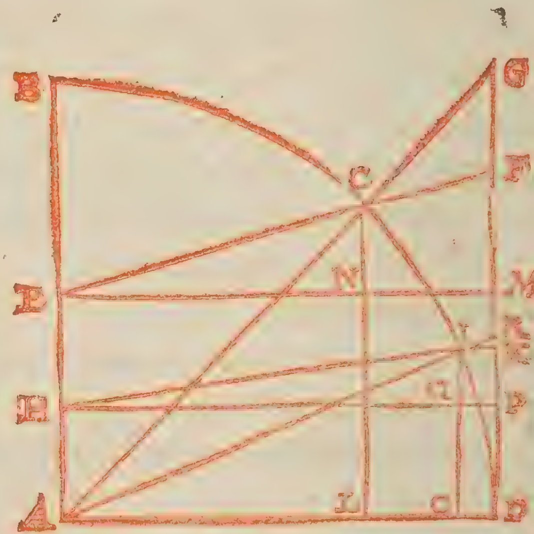
At quoniam nec hæc menſurandis circulis maioribus ſufficit, addimus quartum exemplum ex magno Canone Rhetici, Radij ſcz. particul. 10000000000.

Quar-

Quartum exemplum radij particul. 10000000000.

Sit itaque in eodem ſchemate radius A B particul. 10000000000, & A H $\frac{1}{1024}$ pars radij earundem 9765625; item I D vltimus arcus Quadrantis $\frac{1}{1024}$; eiuſque ſinus rectus I O $15339801\frac{1}{2}$ in menſura radij particul. 10000000000; & complementi $999998234\frac{1}{2}$. Denique ſinus recti I O, & ultimæ partis radij Q O differentia I Q, particul. $5574176\frac{1}{2}$. His datis, per præmiſſum Theorema eſt.

Vt H Q ſinus rectus complementi ultimi arcus $999998234\frac{1}{2}$ ad I Q differentiã ſinus recti ultimi arcus, & ultimę partis radij $5574176\frac{1}{2}$, ita H P radius 10000000000 ad K P 5574183, differentiam perimetri arcus ultimi D K, & ultimæ partis radij D P. Quæ differentia ſi ad vltimam partem radij D P adijciatur, componitur D K 15339808 perimeter ultimi arcus D I. At per 15 Quinti Euclidis.



Vt A H vltima pars radij 9765625 eſt ad D K vltimi arcus perimetrum 15339808; ita A B radius 10000000 ad perimetrum Quadrantis B C D $15707963\frac{3}{10}$. Cuius duplus $3141592 6\frac{6}{10}$ eſt perimeter ſemicirculi.

Verùm ſi diameter ponatur particul. 10000000, circuli perimeter eſt $31415926\frac{6}{10}$. Quę diametri & perimetri ratio, accuratiſſima eſt omnium quæ ex magno Canone Triangulorum deducuntur. Ex hypotheſi enim radij particul. 10000000000, (quem idem Canon ſupponit) perimetrum dare licet qui reſpondeat radio particul. 10000000, non autem radio part. 10000000000. Nam cùm ratio radij ad perimetrum quadrantis colligatur ex ratione partis radij ultimæ ad perimetrum arcus ultimi; perimeter autem arcus ultimi tribus ſaltem notis, à radij dati notis deficiat; oportet etiam quadrantis perimetrum totidem notis à radij notis deficere, vt conſe-

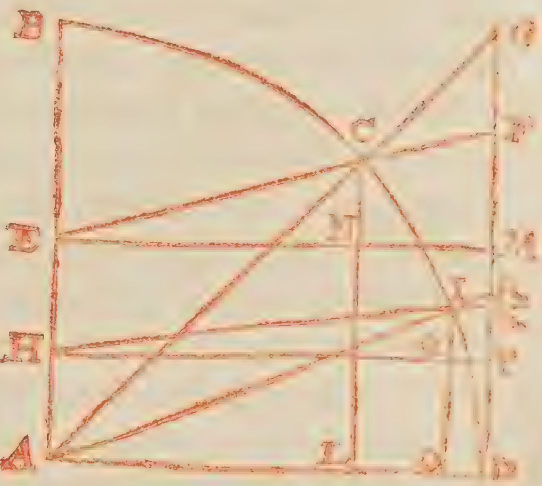
quentes

quentes magnitudines, antecedentibus (& quidem ἀλόγοις) reſpondeant. Quamobrem vt hîc, ita etiam in reliquis exemplis omnibus, numero notarum perimetri arcus ultimi, ſemper quadrantis perimetri notarum numerus æqualis eſt ponendus; ita enim ratio radij ad perimetrum quadrantis, reſpondebit exactè rationi vltimæ partis radij ad ultimi arcus perimetrum.

At quia nec hæc diametri & peripheriæ ratio, maioribus circulis convenit, adijcio quintum exemplum radij particul. 100000,00000, 00000,00000,000.

Quintum exemplum radij particul.

100000,00000,00000,00000,00000,000.



Repetatur precedens figura, ponaturq́ue A B radius partic. 100000, 00000,00000,00000,000; erit A H vltima pars radij earundem 37252, 90298,46191,4062½; item D I ultimus Quadrantis arcus $\frac{1}{268435456}$; & I O eiuſdem ſinus rectus in menſura radij particul. 58516,72317,06863 869 —— & H Q complementi ſinus earundē 99999,99999,99999,9828– tandemq́ue ſinus recti I O & ultimæ partis radij Q O differentia I Q, particul. 21263,82018,60672,4627. Hinc per præmiſſum Theorema eſt.

Vt H Q ſinus rectus complementi ultimi arcus 99999,99999,999 99,9828— ad I Q differentiam 21263,82018,60672,4627, ita H P radius 100000,00000,00000,0000, ad K P 21263,82018,60672,4664 differentiam perimetri arcus ultimi D I, & ultimæ partis radij D P. Quæ differentia cum ultima parte radij, componit D K 58516,72317, 06863,8726 perimetrum arcus ultimi D I, neglecta fractione ½, quia

ſinus

ſinus ultimi arcus I O, tantum deficit ab ultima parte radij A H.

Ergo per 15^{m} Euclidis

Vt A H vltima pars radij 37252,90298,46191,4062$\frac{1}{2}$ ad D K 58516, 72317,06863,8726 perimetrum arcus ultimi; ita A B radius 100000, 00000,00000,000, ad 15707,96326,79489,6619, perimetrum Quadrantis. Cuius duplus 31415,92653,58978,3238 — eſt perimeter ſemicirculi

At ſi diameter ſtatuatur particul. 100000,00000,00000,000, circuli perimeter eſt earundem 31415,92653,58978,3238 —

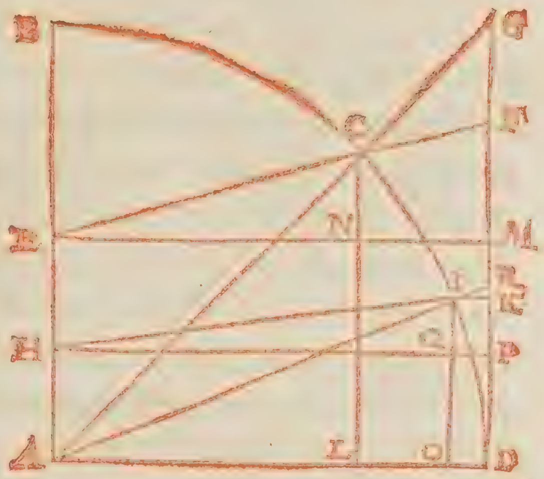
Quæ ratio perimetri ad diametrum multò accuratior eſt illâ quam Clariſſimus *Ludolphus a Collen*, in opere ſuo Cyclometrico, ex eiuſdem arcus inſcripta & circumſcripta demonſtravit, nimirum vt 100000, 00000,00000,0 ad 31415,92653,58978,32 minorem iuſtà; & 31415, 92653,58978,33 iuſtà maiorem. Vtraque enim duabus ultimis notis deficit à noſtra. Apparet itaque verum eſſe quod ſupra diximus, rationem diametri & peripheriæ citiùs, accuratiuſque obtineri per ultimi arcus tangentem abſciſſam, hoc eſt per noſtram τετραγωνίζουσαν, quàm per eiuſdem arcus inſcriptam & circumſcriptam: ideoque noſtram Cyclometriã, Archimedæa (qua *Ludolhpus* vſus eſt) ἀκριβεστέραν, magiſque compendioſam eſſe. Nam quod Archimedæam nonnulli noſtræ præferendam eſſe exiſtimant, quod ea ultimam perimetri notam perpetuò concludat intra duos terminos maiorem & minorem, noſtra verò hoc faciat nunquam: error eſt, quia & noſtra hoc ipſum cum Archimedæa perpetuò facit. Enimverò Cyclometria noſtra vltimam notam ſemper dat exactè, quemadmodum in precedente exemplo demonſtravimus: eſt itaque ſine fractione, iuſtà ſemper minor; & cum fractione, vel cum unitate, perpetuò iuſtà maior. In exemplo, ſi detur Diameter particul. 10000000, perimeter maior eſt quàm 31415926, & minor quam 31415927, vel etiam quã 31415926$\frac{6}{10}$. Item ſi diameter detur particul. 100000,00000,00000,000, perimeter maior eſt quam 31415,92653,58978,3238, & minor quàm 31415, 92653,58978,3239. Atque ita in cæteris; ſi modò numerus notarum perimetri Quadrantis, æqualis ſit numero notarum perimetri arcus ultimi.

Quoniam

Quoniam verò neque iſta Diametri & Perimetri ratio, locum habet in circulis maioribus, addo ſextum exẽplum radij Vaſtiſſimi, particul. 100000, 00000, 00000, 00000,00000,00000,00000,00000, 00000.

Poſtremum exemplum radij particul.

100000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000, 00000



Eſto A B radius in adjuncto Diagrammate particul. 100000, 00000, 00000,00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000; erit A H ultima pars radij earũdem 28421,70943, 04040, 07434,84497,0703 $\frac{1}{8}$, & DI ultimus arcus Quadrantis $\frac{1}{3518437208832}$, eiuſque ſinus rectus I O in menſura radij particul. 44644, 71677, 45104, 88313, 33428, 3564; & complementi H Q ſinus 99999, 99999, 99999, 99999, 99999, 9900; item recti ſinus I O, & ultimæ partis radij Q O differentia I Q particul. 16223,00734,40064, 80878,48931, 2860. Ergo per Theorema præmiſſum eſt.

Vt H Q ſinus rectus complementi ultimi arcus 99999, 99999, 99999, 99999, 99999, 9900, ad differẽtiam I Q 16223,00734,4064, 80878,48931, 2860, ita H P radius 100000, 00000, 00000, 00000, 00000, 000, ad K P 16223, 00734, 40064, 80878, 48931, 2876, differentiam perimetri arcus ultimi D K, & ultimæ partis radij D P. Quæ differentia cum ultima parte radij componit perimetrum arcus ultimi D K particul. 44644, 71677, 441 4, 88313, 33428, 3579, omiſſa fractione ultimæ partis radij $\frac{1}{8}$, quia ſinus ultimi arcus F O, tantundem deficit ab ultima parte radij.

Itaque per 15 Quinti, vt A H ultima pars radij 28425, 70943, 04040, 07434, 84497, 0703 $\frac{1}{8}$ ad D K 44644, 71677, 44104, 88313, 33428, 3579; ita A B 1 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 000, ad 15707, 96326, 79849, 66192, 31321, 6916 $\frac{4}{10}$. Cuius duplus 31415, 92653, 58979, 32384, 62643, 3832 $\frac{8}{10}$ eſt ſemicirculi perimeter. Itaque ὅιων μοίρων, vt Ptolemæus loquitur, ἐστιν ἡ διάμετρος 10000000000000000000000000000,

τοιούτων ἐστιν ἡ περίμετρος 314159265358979323846264338 32 $\frac{8}{10}$. ἔγγιστα.

Et hæc quidem exempla ſufficiunt illuſtrando Theorematis noſtri poriſmati tertio, eademque perſpicuè docent quomodo in terminis multo maioribus, ratio Diametri ad perimetrum definiri poſſit, ſi modò C. non Subtenſarum ad plures particulas ſit ſubductus. Cuiuſmodi eſt quem magnus Logiſta Ludolphus à Collen ſupputavit ad Diametri circulos 75. Verùm quia tam infiniti numerorum anfractus, nec uſum habent ullum, nec ad Cyclometriæ perfectionē ullo modo faciunt, non libet nobis ultra λεπτολεσχεῖν. Omnino enim nos cum Medicorum principe ſtatuimus, ὑπόσοις τῶν ἐπιτηδευμάτων οὐκ ἐστι τὸ τέλος βιωφελὲς, ταῦτ᾽ οὐκ εἶναι τέχνας. Ideoque numeris quos ſupra expoſuimus, contenti ſumus.

Porrò etſi ex ijs quæ hucuſque demonſtrata ſunt, cuivis judicare promptum ſit, quantum Cyclometria noſtra ſuper Archimedæam caput efferat, ut tamen ipſa rei veritas ſit magis conſpicua, exponam paucis, quid inter noſtram, & Archimedæam interſit. Archimedes tertia propoſitione μετρήσιος κύκλου demonſtrat cuiuſvis circuli peripheriam rationem habere ad Diametrum minorem tripla ſeſquiſeptima, & maiorem tripla ſuperdecupartiente ſeptuageſimas primas. Vnde infert iuſtam peripheriæ & Diametri rationem intra terminos illos concluſam eſſe. Hoc quamvis adeo ſit verum, vt qui negare audeat, ex Mathematicis Scholis tanquam ἀγεωμέτρητος eliminari mereatur: quia tamen Cyclometria ex eo ratiocinio deducta, craſſior eſt quam Geometriæ ſubtilitas fert, non videtur abſolutè Geometrica eſſe,

Maniſe-

Manifeſtum enim eſt ex iis quæ ſupra demonſtrata ſunt perimetrum arcus ultimi eſſe ad eiuſdem arcus ſinum, vt idem arcus ad eundem ſinum. Quomodo igitur ultimi arcus ſinus Geometricè datur, ita quoque dare oportet, arcus ultimi (adeoque & circuli ipſius) perimetrū. Atqui Ptolemæus libro magni operis I. cap. IX. vbi ex Hipparchi & Menelai ſententia quantitates ſubtenſarum Geometricè demonſtrat, non cogit eas intra duos limites maiorem & minorem, ſed determinat ſingulas in aſſumpta menſura diametri, exactè ſi rationales ſint, vel ἔγγιςα ſi irrationales. Eadem itaque ratione peripheriæ Quantitas in aſſumpta menſura diametri danda eſt, non autem intra duos terminos concludenda.

Nam ut exemplo rem declarem, Si quis ſinum ſemiquadrantis pronunciet maiorem eſſe quam $\frac{70}{100}$, & minorem quam $\frac{71}{100}$, verum quidem dicet, ſed ex arte ſinum ſemiquadrantis non dabit; cùm potius ex Ptolemæi doctrina pronunciare debeat, ſinum ſemiquadrantis eſſe particul. 7071068 fere, qualium radius eſt 10000000. Atque ita etiam in dimenſione circuli eſt procedendum. Nam ſi dati circuli peripheriam ex arte metiri libeat, non oportet cum Archimede pronunciare rationem peripheriæ ad diametrum inter $3\frac{10}{70}$ & $3\frac{10}{71}$ comprehenſam eſſe, ſed potius affirmare cum Ptolemæo, circuli peripheriam eſſe part. 3.8.30, qualium diameter eſt 1. lib. μεγάλ. σωντάξ. VI. cap. VII. vel ex noſtra doctrina accuratius, peripheriam circuli eſſe part. 31416, proxime, qualium Diameter eſt 10000.

Sed & alterum in Archimedæo ratiocinio animadvertendum eſt, viz. quod limites $3\frac{10}{70}$ & $3\frac{10}{71}$ latè nimis diſſideant. Ex priore enim limite colligitur ratio Diametri ad peripheriam vt 10000 ad 31428— ex altero vt 10000 ad 31408 — at quæ inter has eſt media ſcz. vt 10000 ad 31418—: haud ſatis eſt accurata. Supra enim in tertio noſtro exemplo oſtenſum eſt diametro particul. 10000 deberi perimetrum particul. 31416 proximè; itaque perimeter particul. 31418, non eſt iuſtus. Atque hoc eſt quod obſervavit ante nos, Apollonius Pergæus magnus Geometra, qui non modò poſtulavit diametri & peripheriæ rationem. Archimedæa accuratiorem, ſed vt Eutocius A-

ſcalonita teſtatur, ἀπέδειξεν αὐτὸ δι' ἀριθμῶν ἑτέρων ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγάγων. Idem fecit Philo Gadarenus, quem idem Eutocius affirmat εἰς ἀκριβεςέρους ἀριθμοὺς ἀγάγειν τῶν ὑπ' Ἀρχιμήδους εἰρημένων τοῦτε ζ-φνμι κὶ τῶν κβ Et Ptolemæus libro μεγάλ. συντάξ. VI. cap. VII. Archimedæam rationem vt ſimpliciorem reijcit, & ſuam ſubſtituit, vt 1 ad 3. 8. 30. Et noſtro tempore priſcos omnes antecedens incomparabilis Logiſta Ludolphus à Collen demonſtravit peripheriam circuli cuius diameter ponitur particul. 100000000000000000000, maiorem eſſe quam 314159265358979323846, & minorē quam 314159265358979323847. Cuius veſtigijs etiam nos inſiſtētes oſtendimus circuli cuius diameter eſt 10000000000000000000000000000, perimetrum eſſe minorem quam 31415926535897932384626433832 $\frac{8}{10}$, & maiorem quam 31415926535897932384626433832.

Sequitur verò tertium in Archimedæo ratiocinio notandum, nimirùm quod ratio diametri & peripheriæ tripla & ſeſquiſeptima, hoc eſt vt 7 ad 22, quæ tantum ſervit dimenſioni circuli minoris, puta cuius diameter ponitur particul. 100, perperam propoſitione μετρήσιος κύκλου ſecunda maiorum circulorum dimenſioni adhibeatur. Licet enim ex ratione peripheriæ & diametri maioris, minoris quantitatem colligere, ſed non contra ex ratione minoris, quantitatem maioris. In exemplo, ex ratione diametri & peripheriæ vt 10000, ad 31416 proximè, rectê infertur ratio diametri & peripheriæ vt 100 ad 314. Eſt enim per regulam auream, vt 10000 ad 31416, ita 100 ad 314. Ex hac verò non ſequitur illa, quia per eandem regulam eſt, vt 100 ad 314, ita 10000, ad 31400, quæ minor eſt iuſtâ. Eodem modo ex ratione diametri & peripheriæ, vt 10000 ad 31416, ſequitur ratio tripla ſeſquiſeptima proximè; nam vt 10000 ad 31416, ita 7 ad 22 ferè. At non ex ratione tripla & ſeſquiſeptima ſequitur ratio Diametri 10000 ad Perimetrum 31416; eſt enim vt 7 ad 22, ita 10000 ad 31428, quæ particulis 12 illa eſt maior. Itaque ne Cyclometria ſit mendax, oportet vel ex ratione diametri & peripheriæ majoris data, inferre quātitatem minoris; vel circuli dati perimetrum ex præſenti poriſmate determinare in data menſura diametri; utrumvis enim fiat, Cyclometria erit vera.

Sed

Sed hæc quidem præcipua ſunt quæ in Archimedæo ratiocinio animadvertenda eſſe exiſtimamus; ex quibus judicare licet de Cyclometriæ noſtræ præſtantia. Quæ enim in Archimedæa deſiderantur, reperiuntur in noſtra: & quæ demonſtratione operoſa ab Archimede adſtruuntur, facili & perſpicua ἀποδείξει à nobis expediuntur. Reliquum eſt vt in Cyclometria Dinoſtrati deinceps tentemus, quod in Archimedæa, Deo juvante, fecimus & perfecimus.

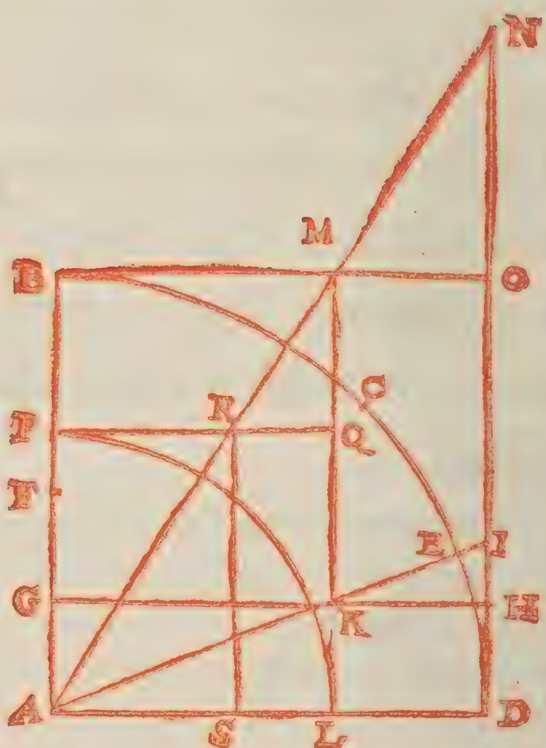
6. Si in dati circuli quadrante ab ultimo ſectionis radij erecti puncto, recta πρὸς ὀρθὰς *ducatur in tangẽtem ultimo arcui æqualem, & ex centro quadrantis in dictæ tangentis terminum alia recta agatur priorem ſecans; perpendicularis à puncto ſectionis in radium abſcindet baſin* τετραγωνιζούσης *Dinoſtrati.*

Inter lineas quæ Geometrarum ſcriptis celebrantur, duæ primum locum obtinent, Admirabilis & τετραγωνίζουσα. Pappus admirabilem tribuit Menelao: τετραγωνίζουσαν vero idem Pappus cum Proclo attribuunt Dinoſtrato, Nicomedi, Hippiæ. Conati autem ſunt magni illi Viri τετραγωνίζουσαν deſcribere per duos motus imaginarios, radij ſcz. & lineæ contra baſin Quadrantis parallelæ; quæ dum motu ὁμαλῷ & ἰσοχρονίῳ procedunt, radius quidem Quadrantem & parallela radium erectum percurrendo, quacunque earum communis ſectio procedit, linea ducitur, quæ ab officio τετραγωνίζουσα appellatur, quia ſcz. excogitata fuit ad circulum quadrandum. Id verò inventum reprehendit Pappus quia principium petit. Cùm enim potiſſimum ei fini comparatum ſit vt punctum τετραγώνιζον definiat, idque prius evaneſcat quàm inventum ſit, neque ulla ratione ex Dinoſtrati principijs obtineatur, rectè eam reijcit Pappus, vt inutilem, & quæ deſcribi non poſſit.

Tentavit ſuperioribus annis Doctiſſimus Clavius eandem deſcribere per puncta radij : & parallelæ ſeſe interſecantium (quod tamen artificium magnos illos Viros non latuit) ſed conatu irrito : quia vt Sporus Nicenus animadvertit, & Clavius ipſe fateri cogitur, ipſius τετραγωνισούσης finis eo modo nunquam deprehenditur.

Nos itaque primi aperimus viam terminum lineæ τετραγωνισούσης deprehendendi, eamque munimus demonſtratione ſequenti.

In adjuncta figura, eſto circuli dati quadrans A B C D inſcriptus quadrato A B O D, cuius peripheria B C D ſit continuè biſecta, primùm in C, ſecundò in E, biſectus quoque ſit eodẽ modo radius A B, primùm in F, ſecundò in G. Deinde per præmiſſum Theorema deſcribatur recta D I, æqualis arcui ultimo E D. Tãdem ex G ultimo biſectionis radij puncto agatur normalis G H in tãgentem D I, & ex A centro quadrantis, mittatur alia recta A I in terminum tãgentis D I, ſecans priorem G H in puncto K. Dico A L partem radij A D quã abſcindit perpendicularis K L à puncto ſectionis K in radium A D, eſſe baſin τετραγωνιζούσης Dinoſtrati.



Continetur enim K L in M, & ex A centro ducatur recta A N per punctum M in tangentem D N, eruntque triangula A L M & A D N ſimilia, propter rectos angulos ad L & D, communem ad A : ideoque per 4^m Sexti Euclidis.

Vt A L ad L M, ita A D ad D N.

Eſt autem D N æqualis quadranti B C D. Nam per 15 Quinti Euclidis.

Vt

Vt K L quarta pars radij, ad I D rectam æqualem quartæ parti Quadrantis B C D, ita L M id eſt A B radius, ad D N rectam æqualem Quadranti B C D. Ergo per 7 Quinti

Vt A L ad L M radium, ita A D radius ad quadrantem B C D: adeoque recta A L, radius L M, & quadrans B C D ſunt continuè proportionales.

Demonſtravit verò Dinoſtratus baſin τετραγωνιζούσης, radium, & peripheriam Quadrantis continuè proportionales eſſe. Quamobrem cum pars radij abſciſſa A L, radius A D, & peripheria BCD continue proportionales ſint; ſequitur partem radij abſciſſam A L eſſe baſin τετραγωνιζούσης dinoſtrati. Quod erat demonſtrandum.

PORISMA.

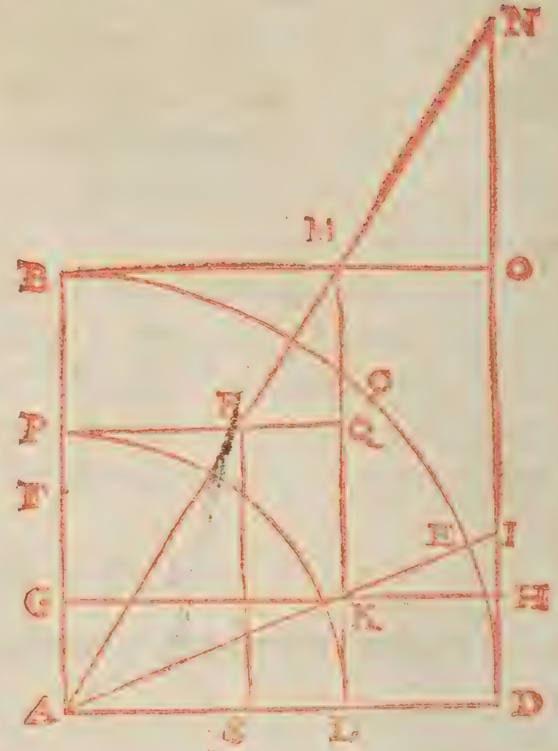
Itaque tertia proportionalis baſi τετραγωνιζούσης, & dati quadrantis radio, peripheriæ dicti quadrantis æqualis eſt.

Quia enim ex dinoſtrati demonſtratis, baſis τετραγωνιζούσης, eſt ad radium, vt radius ad peripheriam Quadrantis; & ex noſtri Theorematis ἀποδείξι, baſis τετραγωνισούσης eſt ad radium, vt radius ad tertiam proportionalem; manifeſtum eſt peripheriam Quadrantis & tertiam proportionalem habere eandem rationem ad radium; atque adeò per 9. Quinti Euclidis peripheriam Quadrantis & tertiam proportionalem inter ſe æquales eſſe.

Apparet autem ex præſenti poriſmate, quomodo baſis τετραγωνιζούσης Dinoſtrati beneficio, cuiuſvis circuli Quadranti dato recta æqualis deſcribi poſſit; & cuivis rectæ datæ æqualis peripheriæ Quadrans. Primò enim, ſi recta ſit ducenda æqualis dato peripheriæ quadranti: oportet per præſens Theorema à radio Quadrantis dati auferre baſin τετραγωνιζούσης, deinde baſi τετραγωνιζούσης & radio invenire tertiam proportionalem, ea enim per præſens poriſma æqualis eſt dato peripheriæ Quadranti.

Exem-

Exempli gratia, in præcedente ſchemate, DN tertia proportionalis baſi τετραγωνιζούσης A L & radio A D, æqualis eſt peripheriæ QuadrantiB C D.



Contra ſi quadrans peripheriæ ſit decircinandus æqualis rectæ datæ; oportet deſcribere quemcunque circuli Quadrantem, rectamque invenire, pet Theorema præſens, peripheriæ Quadrãtis deſcripti æqualem. Quâ obtentâ, reperienda eſt quarta proportionalis, rectæ inventæ, radio Quadrantis deſcripti, & rectæ datæ; ea enim eſt radius Quadrantis circuli poſtulati. In exemplo, ſi in eodem ſchemate detur recta L M, cui æqualem circuli Quadrantem deſcribere oporteat; vbi quadrans A B C D ὡς ἔτυχε deſcriptus fuerit, rectaque D N reperta peripheriæ B C D æqualis, invenienda eſt A L quarta proportionalis rectæ D N, radio A D, & datæ rectæ L M; ea enim eſt radius circuli Quadrantis A P L, eiuſque peripheria P L eſt æqualis datæ rectæ L M. Quæ fuere præſtanda.

7. Si tertia proportionalis dicta fiat circuli radius, radius quadrantis dati erit baſis τετραγωνιζούσης.

Manente ſuperiore Diagrapha, ſit datus circuli quadrans A P L, & ML tertia proportionalis baſi τετραγωνιζούσης AS & radio RS, id eſt A L: fiat autem M L id eſt A D radius Quadrantis circuli B C D; Dico A L radium circuli quadrantis APL eſſe baſin τετραγωνισούσης. Eſt enim per 4^{m} Sexti Euclidis.

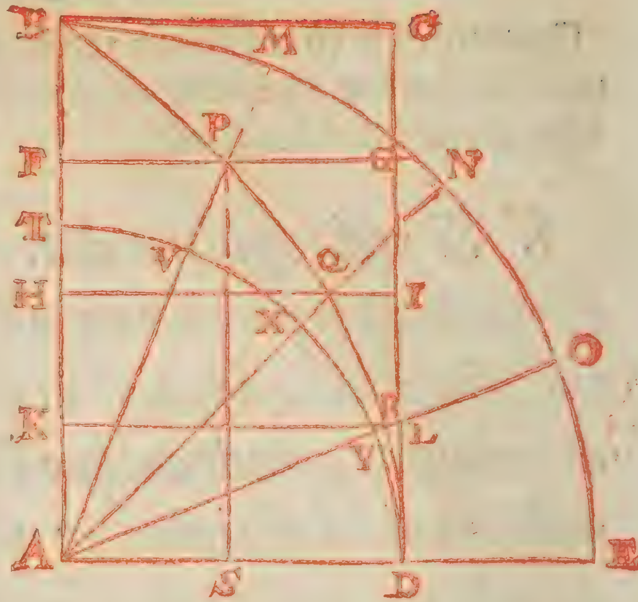
Vt A L ad M L, ita A D ad D N.

Quam-

Quamobrem cùm DN ſit tertia proportionalis radio A D,& A L manifeſtũ eſt ex Theoremate pręmiſſo AL eſſe baſin τετραγωνισούσης Quod erat oſtendendum.

8. *Si rectangulum dati circuli quadrantis radio & tertia proportionali dicta contentum deſcribatur, eiuſq; latera maiora in quotvis partes æquales dividantur, quadranſque circuli tertiæ proportionalis radio deſcriptus in partes æquales totidem; deinde per puncta diviſionum laterum maiorũ parallelæ ducantur, radijq; in puncta ſectionum quadrãtis: vbi horum ſinguli ſecant illarum ſingulas, puncta ſunt lineæ* τετραγωνιζούσης *Dinoſtrati, lineaque vniformiter per ea in terminum baſis* τετραγωνιζούσης *ducta, eſt ipſa linea Dinoſtrati optata.*

Admiranda eſt natura lineæ τετραγωνιζούσης, quia non modò per eam circulus quadratur, & peripheria circuli in rectam lineam extenditur, ſed & multa alia perficiuntur quæ magnum uſum habent in Geometria, & ſcitu perjucunda ſunt. Reiecta quidem eſt ea ipſa linea à Pappo Alexandrino, & Sporo Niceno tanquam inutilis, ſed non aliam ob cauſam; quàm quod eos via lateret ipſius terminum deprehendendi: quo latente ipſa linea revera eſt inutilis. Verùm quia 6 Theoremate via nobis munita eſt, terminum τετραγωνιζούσης obtinendi, non poteſt non expedita eſſe ipſius lineæ deſcriptio, ſicuti præmiſſum Theorema docet, cuius ἀπόδειξιν ſubijcio.



Deſcribatur rectangulnm A-B C D contentum dati circuli quadrantis radio A D, & tertia proportionali A B, lateraq́; A B & C D majora dividantur in quatuor partes æquales; quadranſque A B E, deſcriptus radio tertiæ proportionalis A B in partes æquales totidem: deinde per puncta diviſionum laterum maiorum, ducantur parallelæ F G, H I, K L, radijque A M, A G, A O, per puncta ſectionum quodrantis. Vbi autem radius A B ſecat parallelam B C, & radius A M parallelam F G, item radius A N parallelam H I, denique radius A O parallelam K L, nimirum in ſignis B, P, Q, R, ſunt puncta lineæ τετραγωνιζούσης Dinoſtrati, lineaque B P Q R D per ea vniformiter ducta in terminum baſis τετραγωνιζούσης D, eſt ipſa linea Dinoſtrati optata. Nam radius A B circa centrum A per peripheriam B M N O E eodem tempore movetur æquali motu, quo latus B C itidem æquali motu fertur deorſum per latera A B & C D, idque prorſus vt Dinoſtratus imaginatus eſt. Hinc fit, vt quando radius A B pertranſivit quamcunque partem arcus B M N O E, tunc latus B C æquales partes laterum A B, D C percurrerit. Habet enim & hîc locum prima Archimedis propoſitio in Helicibus, *Si punctum lineas æquevelociter permeaverit, ſpacia permeata erunt æqualia temporibus.* Vnde etiam manifeſtum eſt lineam τετραγωνίζουσαν Dinoſtrati eſſe ex familia Helicum, vt rectè iudicavit incomparabilis vir *Ioſephus Scaliger*. Enimverò ordinata Helix Cononis aut Archimedis deſcribitur à pũcto quod æquevelociter percurrit circuli radium & peripheriam; ita etiam τετραγωνίζουσα deſcribitur à puncto quod æqueveloci motu permeat latera A B, D C, & peripheriam Quadrãtis B M N O E. Diſcrimen tamen in

men inter utramque manifeſtum eſt. Ordinata enim Helix æqualibus radij decremẽtis deſcribitur, at τετραγωνίζουσα decrementis inæqualibus, nimirum A B, A P, A Q, A R, AD, vt non ſine cauſa idem Scaliger exiſtimarit τετραγωνίζουσαν eſſe ἕλικα σεσαλευμένην hoc eſt, volutam luxatam aut delumbatam. Non ſentimus autem cum ipſo deſcriptionem τετραγωνιζούσης, ſolo quadrantis intervallo perficiendam eſſe: τετραγωνίζουσα enim peculiarem circinum vendicat, cuius loco ſi Mechanicus circuli circino velit uti, præſtabit inæqualia intervalla A B, A P, A Q, A R ſumere, quàm unicum intervallum A B; niſi malit per tria quævis puncta arcus ducere, atque ita τετραγωνίσουσαν complere.

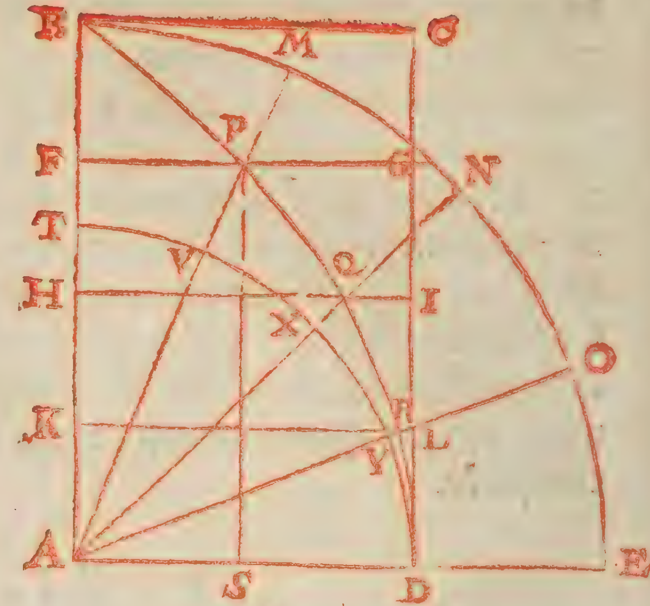
PORISMA.

Licet igitur circuli cuiuſvis dati quadranti τετραγωνίζουσαν *adſcribere.*

Nam per 6 elementum datur tertia proportionalis baſi τετραγωνιζούσης & radio Quadrantis dati: per præſens autem elementũ deſcribitur rectangulum tertia proportionali & radio quadrantis dati contentum, item circuli quadrans tertiæ proportionalis intervallo: atque hinc tandem τετραγωνιζοῦσα ipſa.

9. *Si quadranti dato adſcripta ſit* τετραγωνίζουσα, *perpendicularis à quocunque* τετραγωνιζούσης *puncto in baſin, æqualis eſt arcui quem recta, ex centro quadrantis ducta in* τετραγωνιζούσης *punctum, abſcindit ex dicto peripheriæ quadrante.*

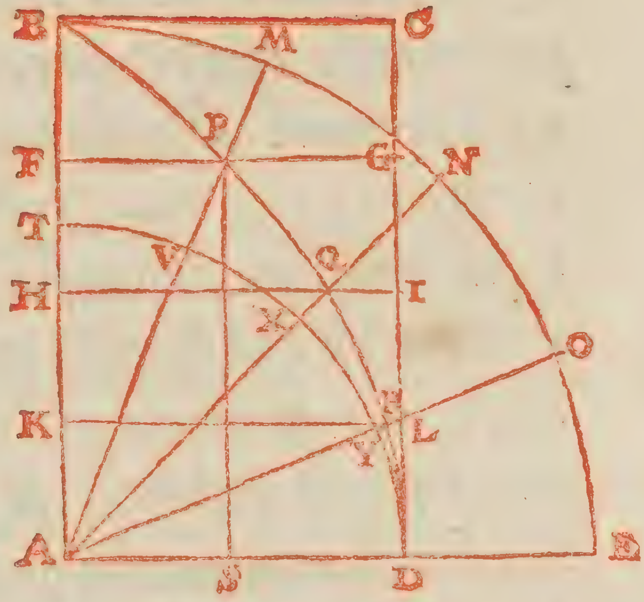
Repetatur ſuperius diagramma; ſitque A T D datus circuli quadrans, & B P Q R D τετραγωνίζουσα eidem adſcripta: ducatur quoque recta A P ex A centro Quadrantis in P punctum τετραγωνιζούσης. Dico perpendicularem P S à puncto τετραγωνιζούσης P, in A D baſin, æqualem eſſe arcui D V, quem recta A P abſcindit in quadrante D T. Quoniam enim P S id eſt F A, talis pars eſt ipſius A B ex conſtructione, qualis E M eſt ipſius E B, vel D V ipſius D T; A B autem per conſectarum 6 elementi, æqualis eſt quadranti D T; eſt etiam per 11 Quinti Euclidis P S æqualis arcui D V. Quod erat demonſtrandum.



PORISMA PRIMVM.

Hinc primò reperire poſſumus circuli cuiuſvis arcui dato rectam æqualem, ſi modò Quadranti circuli dati τετραγωνίζουσα *adſcripta fuerit. Nam ſi datus arcus ſit circuli quadrans, tertia proportionalis eſt æqualis arcui dato. At ſi arcus datus quadrante ſit minor, ubi per terminũ dati arcus in* τετραγωνίζουσαν *recta emiſſa fuerit, perpendicularis à puncto ſectionis* τετραγωνιζούσης *in baſin, eſt arcui dato æqualis. Si verò*

rò datus arcus maior fuerit circuli quadrante, repe-rienda primùm eſt recta æqualis quadrãti, vel ſemi-circulo, vel tribus quadrantibus; deinde alia recta æqualis reliquo arcui qui minor eſt quadrante. Nam duæ hæ rectæ conjunctæ ſunt toti arcui dato æquales.



Iteretur & hic præcedens figura; eſtoque circuli dati Quadranti T D, & τετραγωνίζουσα eidem adſcripta B P Q R D. Iam ſi arcus datus ſit quadrans D T, æqualis ei recta erit A B, eſt enim perpendicularis à termino τετραγωνιζούσης B in baſin A D. Quod ſi detur arcus V D, erit ei æqualis perpendicularis P S demiſſa ex P puncto τετραγωνισούσης in baſin A D: recta enim A P ex A centro Quadrantis ducta per V terminum arcus dati ſecat τετραγωνίζουσαν in P. Poſtremo ſi detur quadrans T D & arcus V D ſimul, erit ei æqualis recta A B & P S ſimul. At ſi duo vel tres Quadrantes dentur in propoſito circulo, vnà cum arcu V D, erit ei æqualis recta A D vel bis vel ter ſumpta, cum recta P S ſemel. Quæ erant præſtanda.

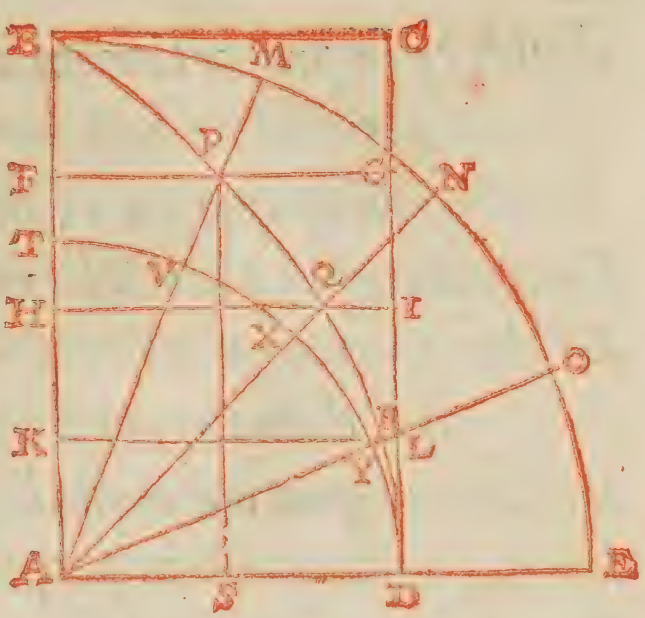
PORISMA SECVNDVM.

Secundò cuilibet rectæ datæ abſcindere poſſumus

æqualem arcum ex dato quovis circulo, cuius circumferentia non eſt minor quàm recta data; ſi prius dati circuli quadranti τετραγωνισοῦσα *fuerit adſcripta. Nam ſi recta data æqualis fuerit tertiæ proportionali, quadrans circuli dati æqualis eſt rectæ datæ. Quod ſi minor fuerit recta data quam tertia proportionalis, oportet ex ea abſcindere rectam datam & à termino abſciſſæ parallelam baſi* τετραγωνισούσης *ducere in* τετραγωνίζουσαν, *rectamq́ ex centro quadrantis in punctum concurſus parallelæ &* τετραγωνιζούσης, *arcus enim quadrantis quem eadem recta abſcindit, eſt datæ rectæ æqualis. Tandem ſi recta data major fuerit quàm tertia proportionalis, abſcindere oportet hanc ex illa quoties licet, vel ſemel, vel bis, vel ter, reperienduſque eſt arcus reliquæ æqualis, vt ſupra. Hic autem vel uni, vel duobus, vel tribus quadrantibus conjunctus, prout vel ſemel, vel bis, vel ter, tertia proportionalis ex data recta abſciſſa fuit, componit arcum datæ rectæ æqualem.*

In eodem ſchemate, Eſto dati circuli quadrans TD, eiq́ue adſcripta τετραγωνιζοῦσα B P Q R D: ſitq́ue primum recta data æqualis tertiæ proportionali A B, erit ei æqualis quadrans T D, vt ſupra demonſtratum eſt.

Quod



Quod ſi data recta ſit æqualis ipſi A F, adeoque minor tertia proportionali A B; oportet eam ex A B abſcindere, & ex eius termino F baſi τετραγωνιζούσης AD parallelam F P ducere in τετραγωνίζουσαν, & à puncto P concurſus parallelæ & τετραγωνιζούσης perpendicularem P S demittere in baſin; deinde ex A centro rectam ducere in P, quæ per præſens elementũ abſcindet ex T D Quadrante arcum V D æqualem rectæ datæ. Poſtremò, ſi data recta ſit æqualis tertiæ proportionali A B & rectæ A F ſimul, oportet hanc abſcindere ex A B, & invenire arcum æqualem reliquæ, nimirum arcum V D: hic enim coniunctus cum quadrante T D, æqualis erit rectæ datæ. Quod ſi recta data vel bis, vel ter metiatur A B, & rectam A F ſemel, oportet Quadrantem T D vel bis, vel ter coniungere arcui V D, prout recta data vel bis vel ter metitur A B, eumque addere arcui V D, eruntque hi arcus coniuncti rectæ datæ æquales. Quæ facienda erant.

PORISMA TERTIVM.

Tertio datum circuli arcum dividere licet in proportionem datam, ſi dati circuli quadranti τετραγωνίζουσα *fuerit adſcripta. Nam ſi arcus datus fuerit arculi quadrans oportet tertiam proportionalem divide.*

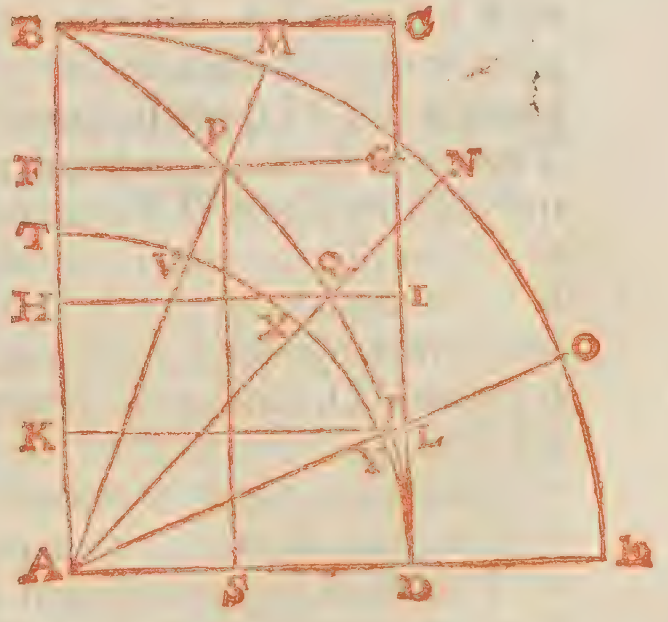
dividere in proportionem datam, & ex puncto diviſionis parallelam baſi τετραγωνιζσύσης *ducere in* τετραγωνίζουσαν, *rectamque ex centro quadrantis in punctum concurſus parallelæ &* τετραγωνιζούσης; *hæc enim ſecabit circuli quadrantem in proportionẽ datam.*

Quod ſi datus arcus duobus quadrantibus, vel tribus, vel quatuor æqualis fuerit, ſecare oportet unum quadrantem in proportionem datam, & duplos arcuum ſectorum ſumere, ſi datus arcus duos quadrantes æquaverit; vel triplos, ſi tres; vel quadruplos, ſi quatuor. Dupli enim dividunt duos quadrantes, tripli tres, quadrupli quatuor, ut ſimplus unum.

At ſi arcus datus minor ſit quadrante, oportet rectam ducere in τετραγωνίζουσαν *per terminum arcus dati, & ex puncto ſectionis* τετραγωνιζούσης *perpẽdicularem in baſin, & æqualem ei abſcindere ex tertia proportionali: Hæc deinde in proportionem datam ſecanda eſt, & ex punctis ſectionum parallelæ baſi ducendæ in* τετραγωνίζουσαν, *rectæque ex centro quadrantis per puncta interſectionum*

paral-

parallelarum & τετραγωνιζούσης; hæ enim arcum datum dividunt in proportionem datam. Si verò datus arcus ſit quadrante major, ſecetur primum quadrans, deinde reliquus arcus in proportionem datam, & ſecti arcus conjungantur; ita datus arcus in datam proportionem ſectus erit. Denique ſi datus arcus ſit quadrantibus duobus vel tribus major; ſecandi primũ ſunt vel duo quadrantes, vel tres in proportionem datam, deinde arcus reliquus; nam & hi conjuncti propoſitum arcum in datam proportionem divident.



Datus eſto in eadem diagrapha quadrans T D, quem dividere oporteat in proportionem datam; puta quadruplam, ſitque ei adſcripta τετραγωνίζουσα B P Q R D. Dividatur primum tertia proportionalis A B in partes æquales quatuor, deinde ex punctis ſectionum F, H, K, ducantur rectæ F P, H Q, K R parallelę A D, quæ ſecent τετραγωνίζουσαν in punctis P, Q, R; tandemque ex A centro agantur in puncta ſectionum τετραγωνιζούσης rectæ A P, A Q, A R; ſecabunt hæ quadrantem T D datum in proportionem quadruplam, Nam A B ex præſenti Theoremate eſt æqualis

Quadranti T D, & partes A B partibus T D. Cùm igitur partes A B quadrantes ſint, oportet etiam partes T D quadrantes eſſe; adeoque rectam A B, & circuli dati quadrantem T D diviſum eſſe in proportionem quadruplam. Quod ſi arcus propoſitus, ſemicirculo, vel tribus Quadrantibus, vel etiam ſemicirculo æqualis fuerit, oportet nihilominus Quadrantem vt ſupra ſecare in proportionem quadruplam, ſed ſi ſemicirculũ eodem modo dividere libeat, ſumendus eſt duplus ipſius D Y, viz. D X, hic enim eſt ſemicirculi quadrans. Aut ſi peripheria tribus quadrantibus conſtans eodem modo ſecanda ſit, triplus arcus, nimirum D V eſt capiendus, Nam & hic tres Quadrantes circuli vna peripheria contentos diſpeſcit in proportionem quadruplam. Tandem ſi circulus eodem modo dividendus ſit, ſumendus eſt quadruplus arcus D T: hic enim quia eſt dati circuli quadrans, vtique eundem circulum ſecat in proportionem eandem. At ſi detur arcus V D, minor Quadrante circuli T D, iſque dividendus ſit in proportionem triplam; oportet rectam ducere ex A centro quadrantis per V terminum arcus dati, quę τετραγωνίζουσαν ſecabit in puncto P, ex quo demittenda eſt perpendicularis P S in baſin A D, & ex A B abſcindenda eſt A F æqualis P S. Hæc deinde dividenda eſt in proportionem triplam, & ex punctis ſectionum F, H, K, ducendæ ſunt F P, H Q, K R, parallelæ baſi A D, quæ ſecabunt τετραγωνίζουσαν in punctis P, Q, R. Tandem ex A centro quadrantis rectæ agendæ ſunt in puncta Q & R, quæ divident arcum D V in proportionem triplam. Nam arcus V D, ex præſenti Theoremate eſt ęqualis rectæ A F, & illius partes FH, HK, KA, ſunt æquales arcubus V X, X Y, Y D. Quare cùm partes A F ſint trientes, oportet & partes arcus V D eſſe trientes, rectamque A F, & arcum V D, diviſum eſſe in proportionem triplam. Tandem ſi arcus datus quadrante ſit maior, oportet primum quadrantem, deinde reliquum arcum ſecare in proportionem datam, & partes quadrantis ſingulas, ſingulis partibus arcus reliqui addere, ſic enim dividetur arcus propoſitus in proportionem datam. Atque ita etiam eſt procedendum, cum peripheria datur duobus, vel tribus quadrantibus maior; niſi quod partes quadrantis ſecti in proportionem datam vel bis, vel ter ſumendæ ſint, prout peripheria data vel duobus vel tribus qua-

dranubus

drantibus eſt maior.

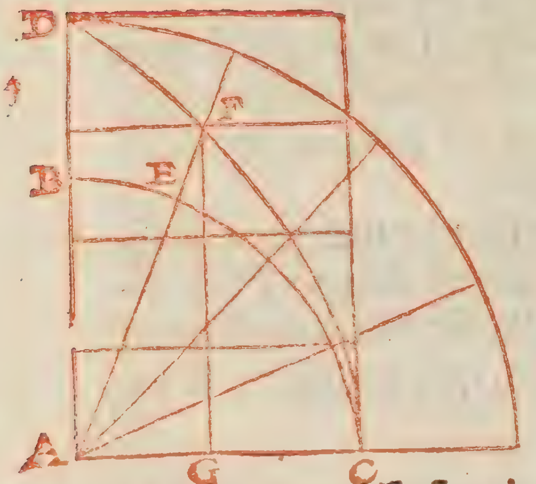
Eſt autem præſentis poriſmatis in Geometria magnus uſus. Primum enim ipſius adminiculo quæcunque figuræ, ſive parium ſive imparium laterum, circulo dato inſcribuntur; circuluſque ipſe, & quævis eius peripheria data, in datam proportionem dividitur.

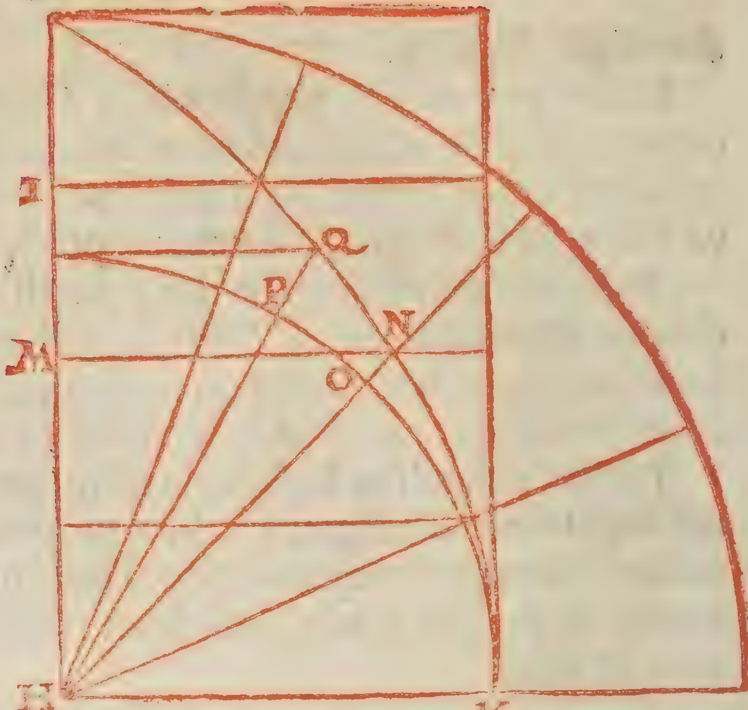
Secundò quivis angulus datus poteſt diſpeſci in proportionem datam. Quia enim per 33. Sexti Euclidis arcus ad arcum eſt, vt angulus ad angulum, haud dubiè quod de arcubus eſt demonſtratum, de angulis una opera demonſtratum eſſe oportet.

Tertiò Triangulùm Iſoſceles conſtrui poteſt, cuius uterque æqualium angulorum ad reliquum habeat proportionem datam : Vnde etiam artificium pendet quamcunque figuram circulo adſcribendi: quod tamen, vt Proclus cenſet, difficile eſt rudibus, quia multiplex & varium eſt opus.

PORISMA QVARTVM.

Poſtremò propoſitis duobus inæqualibus circulis, datoq́ue arcu in alterutro, poſſumus æqualem abſcindere ex altero ; ſi modò utiuſque circuli quadranti τετραγωνίζουσα *ſit adſcripta. Oportet autem arcum in majore circulo datum, non eſſe minore circulo dato majorem. Nam ſi arcui dato inveniatur æqualis recta per primum poriſma; & huic rectæ æqualis arcus in altero circulo, erit hic arcus inventus arcui dato æqualis.*





Sint in præmiſſis figuris, A B C quadrans circuli minoris, & H I K maioris, quibus ſigillatim adſcripta ſit τετραγωνίζουσα D C & L K. Deturque primum in minore circulo arcus E C, cui æqualis abſcindendus ex maiore circulo. Per primum poriſma huius elementi, perpendicularis F G eſt æqualis arcui dato E C. Per ſecundum verò poriſma huius, rectæ F G, cui æqualis eſt ipſa H M, eſt etiam æqualis arcus O K. Itaque per 11 Quinti Euclidis, arcus O K maioris circuli, & E C minoris ſunt æquales. Abſciſſus igitur eſt ex maiore circulo arcus O K, dato E C in minore circulo æqualis. Quod faciendũ erat.

Secundò detur in maiore circulo arcus P K, cui æqualis abſcindendus ſit ex minore. Primum perpendicularis H I æqualis eſt arcui P K per primum poriſma huius. At per ſecundum poriſma rectæ A D (quæ facta eſt æqualis ipſi H I) eſt etiam æqualis arcus B C. Ergo per 11 Quinti Euclidis, Quadrans B C, & arcus P K ſunt inter ſe æquales. Abſciſſus itaque eſt ex minore circulo arcus B C, æqualis P K dato in circulo maiore. Quod facere oportebat.

Atque ita pertractata eſt prima Cyclometriæ pars, de dimenſione circuli ambitus: ſequitur altera de dimenſione circuli areæ, que ſequenti libro eſt explicanda.

CYCLOMETRIÆ

LIBER II.

D dimenſione Circuli areæ.

1. *Altera pars Cyclometriæ eſt quæ benè metitur circuli aream.*

HANC partem Cyclometriæ Græci τετραγωνισμὸν κύκλȣ, noſtri Quadraturam circuli appellant. Eſt autem nobile argumentum quod omnium ætatum Mathematicis propoſitum fuit, vt in eo ſe exercerent: pendetque à ratione diametri & peripheriæ; adeò vt ea inventa τετραγωνισμὸς κύκλȣ ſponte ſequatur. Itaque dubium non eſt, quin pars iſthæc Cyclometriæ perfacilis iam ſit futura, quia diametri & perepheriæ ratio, ſuperiore libro ſatis ſuperque eſt demonſtrata.

2. *Aream circuli dimetiri, eſt non tantum circulo cuicunque dato æquale quadratum deſcribere, & cuivis quadrato dato æqualem circulum, ſed & rationem explicare quam circulus quiſque datus habet ad quadratum ſui diametri.*

Areæ circuli dimenſio vel Geometricè fit, vel Arithmeticè. Si Geometricè, deſcribere oportet quadratum circulo dato æquale, vel cirœulum æqualem dato quadrato. Sin Arithmeticè, explicanda eſt ratio quam circulus habet ad quadratum ſui diametri.

3. Rectangulum cuiuſvis circuli radio, & peripheriæ dimidio contentum, æquale eſt eidem circulo.

Archimedes prima propoſitione μετήσιος κύκλυ demonſtrat omnem circulum eſſe æqualem Triangulo rectangulo cuius unum latus circa rectum eſt circuli radius, alterum perimeter. Demonſtratio autem ſumitur à dimenſione areæ cuiuſvis polygoni ordinati, quæ à minimo ad maximum uniformiter ſe habet. Triangulum enimrectangulum cuius unum latus rectum ambiens eſt perpendicularis à centro polygoni in latus,& alterum perimeter polygoni, polygono æquale eſt. Cùm verò circulus ſit polygonum ordinatum infinitorum laterum, dubium non eſt, quin polygonum ordinatum finitorum laterum ad circulum quoque ſe extendat,quia eadem utrobique eſt ratio. Adeoque veriſſimum eſt quod Archimedes aſſerit, omnem circulum eſſe æqualem Triangulo rectangulo, cuius unum latus eſt circuli radius, alterumipſius perimeter.

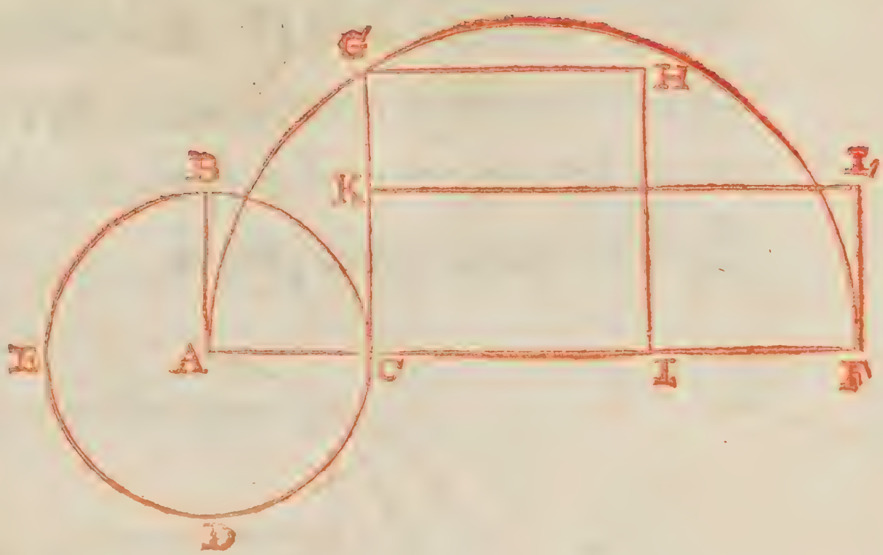
Hinc autem varia exſtiterunt Axiomata apud Theonem & alios,& inter cætera illud quod nos adduximus, *rectangulum circuli cuiuſvis radio & peripheriæ dimidio contentum, æquale eſſe eidem circulo.* Cuius veritas cùm ex Archimedæo elemento, cognita parallelogrammi doctrina, ſit manifeſta, non opus eſt, vt pluribus oſtendatur.

PORISMA PRIMVM.

Primò itaq; cuivis circulo dato licet deſcribere æquale quadratum. Media enim proportionalis inter radium circuli, & ſemiſſem perimetri eſt latus quadrati, circulo dato æqualis.

Detur

Detur in adiuncto ſchemate circulus B C D E, eiuſque radius A C, & ſemiperimeter C F per 1 poriſma 5 Cyclometriæ, vel poriſma 6 elemen. ſitque circulo dato deſcribendũ æquale quadratum; Dico mediam proportionalẽ inter radium A C, & ſemiperimetrum C F eſſe latus Quadrati dato circulo æqualis. Quadratũ enim quod deſcribitur à media proportionali, inter radium circuli A C, & perimetri ſemiſſem C F, æquale eſt (per 17 Sexti Euclidis) rectangulo quod continetur radio A B id eſt K C & perimetri ſemiſſe C F. Quoniam verò per præſens Theorema, hoc ipſum rectangulum, circulo B C D E æquale eſt; vtique & Quadratum deſcriptum à linea media, eidem circulo eſt æquale. Inventâ igitur, per 13 Secti Euclidis C G media proportionali inter radium A C, & ſemiperimetrum C F, datur quadratum C G H I, circulo B C D E æquale. Quod erat faciendum.

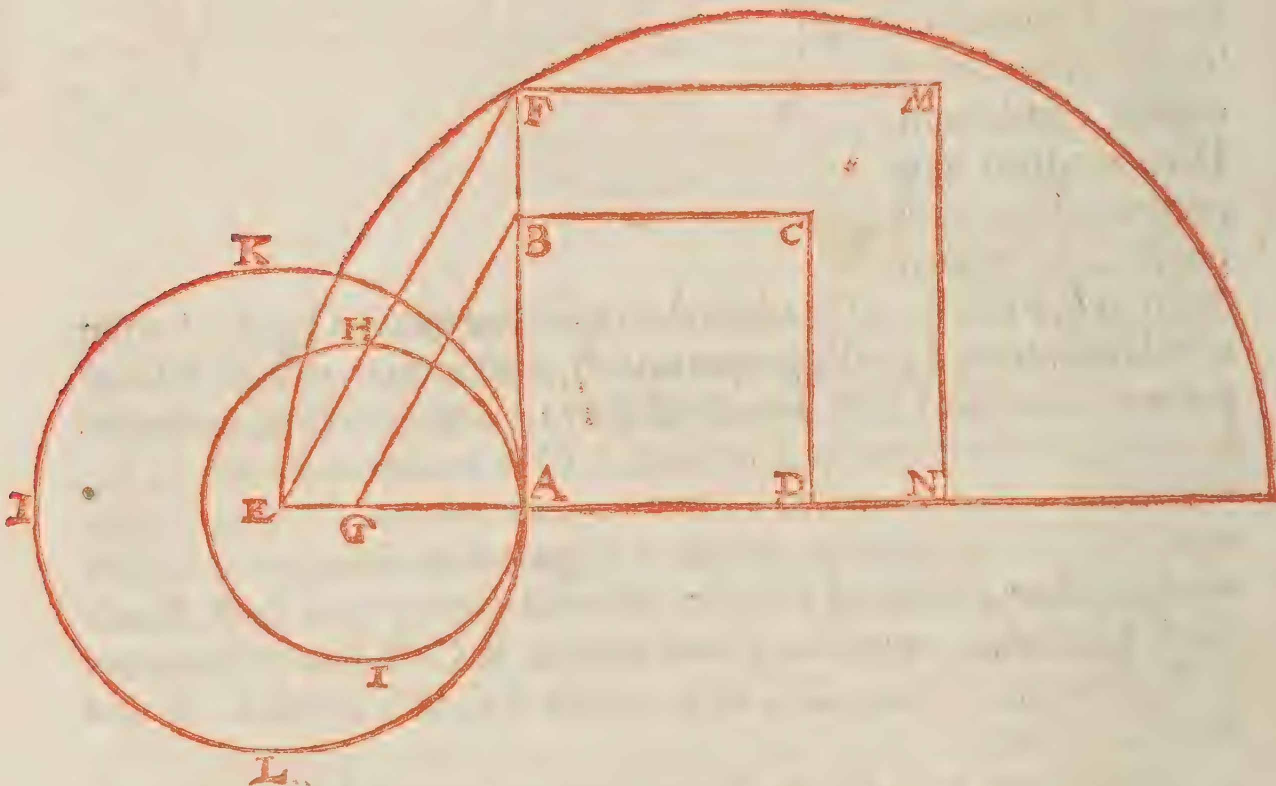


Manifeſtum verò eſt ex demonſtratione præmiſſa, figuram quoque quamcunque rectilineam cuivis circulo dato poſſe conſtrui. Nam ſi per præſens poriſma dato circulo æquale quadratum conſtruamus, & per 25 Sexti Euclidis, eidem quadrato figuram rectilineam æqualem, & ſimilem alteri datæ rectilineæ figuræ; erit eadem figura rectilinea conſtructa dato circulo æqualis.

PORISMA SECVNDVM.

Secundò cuicunque quadrato dato deſcribi poteſt æqualis circulus, ſi prius per præcedens poriſma, cui-

cuivis circulo æquale quadratum deſcriptum ſit. Quarta enim proportionalis deſcripti, datique quadrati lateri, & radio dati circuli, eſt radius circuli, dato quadrato æqualis.



Detur in adiuncto ſchemate quadratum A B C D, cui æqualis circulus deſcribendus ſit, ſitque circulo A K I L ὡς ἔτυχε deſcripto, æquale quadratum, per præcedens poriſma A F M N. Dico quartam proportionalem lateribus A F & A B, & radio A E, eſſe radium circuli, dato quadrato A B C D equalis. Deſcribatur enim recta linea E F ex E puncto in punctum F, & ex B puncto ducatur B G parallela ipſi E F, eruntque Triangula E A F & G A B ſimilia, & latera Triangulorum, per 4 Sexti, proportionalia. Itaque

Vt A F ad A B, ita A E ad A G quartam proportionalem, lateribus quadratorum A F, A B, & radij A E.

Decir-

Decircinetur quoque radio A G circulus A H I, eritque per demonſtrata Pappi,

Vt A E radius ad circulum A K I L, ita A G radius ad circulum A H I.

Et per 22 Sexti Euclidis,

Vt A E ad quadratum A F M N, ita A G ad quadratum ABCD.

Quia autem circulus A K I L radio A E deſcriptus, æqualis eſt quadrato A F M N ex fabrica: eſt etiam circulus A H I, quarta proportionali A G, vt radio, deſcriptus, Quadrato A B C D dato, per 11 Quinti Euclidis æqualis. Quod erat faciendum.

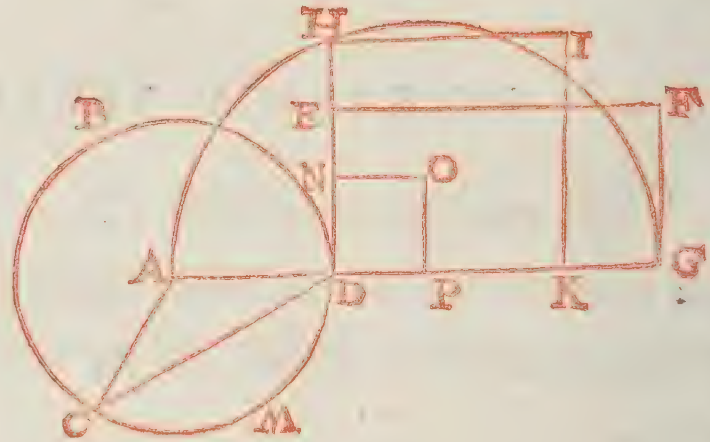
PORISMA TERTIVM.

Poſtremò manifeſtum eſt, circulum quemcunque rationem habere ad diametri ſuæ quadratum, quam diametrus habet ad perimetri ſui quadrantem.

Archimedes propoſitione 2 κύκλου μετρήσιος demonſtrat circulum ad quadratum diametri rationem habere vt 11 ad 14; idque non de omni circulo verum eſt, ſed tantum de minimis, quorum ratio ad diametrum eſt vt 7 ad 22. Nos autem de omni circulo dicimus quod rationem habeat ad diametri ſuæ quadratum, quam diametrus habet ad perimetri ſui quadrantem. Nam ex præſenti elemento conſtat planum è radio & perimetri ſemiſſe eſſe circuli aream. Hinc verò fluit iſta ratio circuli ad diametrum ſuam quadratam, ſicuti patet ex analyſi. Detur enim circuli diameter particul, 20000000, & perimeter earundem, per tertium poriſma 5 elementi Cyclometriæ lib. I, 6283185 3, area eiuſdem erit particul. earundem 314159265000000: planus enim è radio 10000000, & ſemiſſe 31415926½ eſt 314159265 000000. Atqui hæc ipſa ſe habet ad quadratum diametri, vt diameter ad

ter ad perimetri quadrantem. Diameter enim eſt 20000000 particul. & perimetri quadrans earundem particul. 15707963$2\frac{1}{2}$; quadratum diametri 400000000000000. Vt autem 20000000 ad 15707963$2\frac{1}{2}$, ita 400000000000000, ad 314159265000000, prorſus vt ſupra.

4. *Rectangulum ſub radio circuli, & baſis ſectoris perimetri dimidio comprehenſum, eidem ſectori æquale eſt.*



Sit in appoſita figura ſector ACBD, baſis ſectoris DBC, baſis ſemiſſis DB, eiuſque perimeter DG, per primum poriſma 9. elem. I. libri Cyclometriæ. Dico rectangulum EG contentum radio AD id eſt DE ex fabrica, & baſis DBC perimetri dimidio DG, æquale eſſe ſectori ACBD. Nam per 15^{m} Quinti Euclidis partes eandem rationem habent quam earum multiplicia. Quare vt circulus ſe habet ad rectangulum contentum radio & perimetri dimidio, ita etiam ſector ſe habet ad rectangulum contentum radio & perimetri baſis ſectoris dimidio. Eſt autem rectangulum radio & perimetri dimidio contentum, circulo æquale; itaque & rectangulum radio & perimetri baſis ſectoris dimidio contentum, ſectori æquale eſt. Quod erat demonſtrandum.

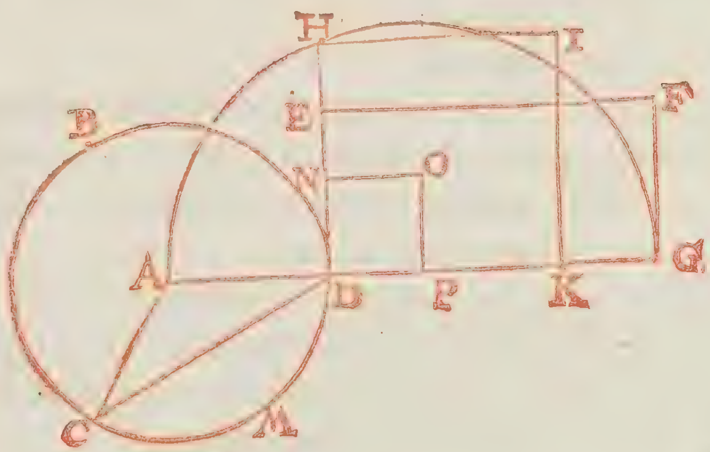
PORISMA.

Itaque circuli cuiuſvis ſectori dato æquale quadra-

dra-

dratum deſcribi poteſt. Nam media proportionalis inter radium circuli & ſemiſſem perimetri baſis ſectoris, eſt latus quadrati dato ſectori æqualis.

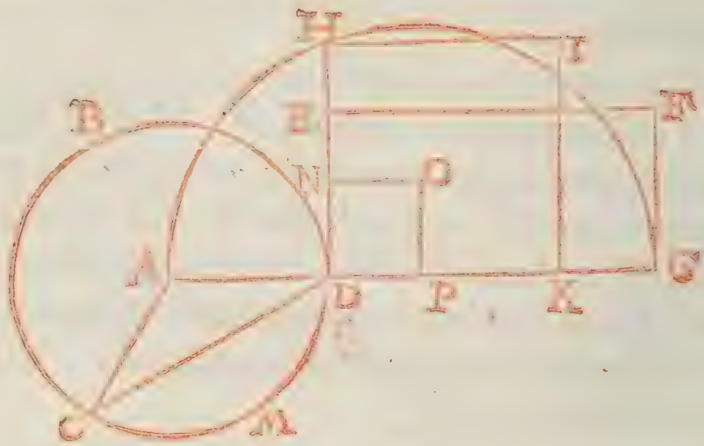
Conſequentia manifeſta eſt. Nam ſi deſcriptum ſit rectangulum contentum radio circuli & baſis ſectoris perimetri dimidio, media proportionalis inter radium circuli & baſis ſectoris perimetri dimidium, per 17 Sexti Euclidis, eſt latus quadrati, eidem rectangulo æqualis. Eſt autem hoc rectangulum baſi ſectoris æquale, itaque & quadratum eidem baſi ſectoris æquale eſt. Vt in ſchemate & exemplo præmiſſo, recta DH, per 13 Sexti Euclidis eſt media proportionalis inter radium AD id eſt DE ex conſtructione, & DG perimetrum dimidium baſis DBC. Itaque per 17 Sexti, quadratum DHIK æquale eſt rectangulo EG. Quia autem hoc rectangulum æquale eſt ſectori A C B D, oportet etiam quadratum D H I K eidem æquale eſſe. Deſcriptum igitur eſt quadratum D H I K, ſectori A C B D æquale; quod erat faciendum.



5. Si triangulum è duobus radijs & baſi ſegmenti, addatur maiori ſectori, totus erit area maioris

maioris ſegmenti; ſin detrahatur ſectori minori, reliquum erit area minoris.

Repetatur ſuperior figura, in qua ſector maior eſt ACBD, & minor ACMD, & triangulum ACD è duobus radijs AC, AD, & baſi ſegmenti CD; Dico ſi triangulum ACD addatur maiori ſectori ACBD, totum fore aream maioris ſegmenti CBD; ſin detrahatur ſectori minori ACMD, reliquum eſſe aream minoris ſegmenti CMD. Quoniam enim maius ſegmentum CBD conſtat ex maiori ſectore ACBD, & triangulo ACD, oportet alterum alteri additum componere aream maioris ſegmenti CBD: item quia minus ſegmentum CMD, pars una eſt minoris ſectoris ACMD, & triangulum ACD pars eius altera, oportet hoc ſectori ACMD detractum relinquere aream minoris ſegmenti CMD. Quod erat oſtendendum.

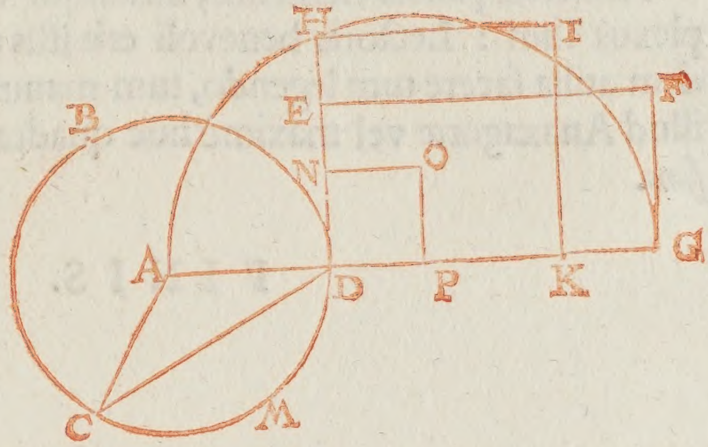


PORISMA.

Hinc licet cuiuſvis circuli ſegmento dato, æquale quadratum conſtituere. Nam ſi detur maius ſegmentum, conſtruenda ſunt quadrata duo, unum ſectori maiori, alterum triangulo æquale, quæ ſimul

mul componunt quadratum maioris ſegmenti. Sin minus ſegmentum detur, conſtruere oportet quadrata duo, unum ſectori minori, alterum triangulo æquale, quorum hoc illi detractum, relinquit quadratum ſegmenti minoris.

Exempli gratia, detur in adjuncto ſchemate maius ſegmentum C G D, cui æquale quadratum deſcribere oporteat. Quoniam quadratum D H I K, per præmiſſum elementum, æquale eſt maiori ſectori A C G D; item quadratum D



N O P per 14 Secundi Euclidis, deſcriptum eſt æquale Triangulo A C D, palam eſt quod quadrata D H I K & D N O P ſimul ſumpta æqualia ſint ſectori maiori A C G D, & triangulo A C D, ſimul. Atqui ſector maior A C G D & triangulum A C D conſtituunt ſegmentum maius C G D; itaque quadrata D H I K & D N O P ſimul ſumpta, ſunt æqualia maiori ſegmento C G D. Iam verò ſi latera quadratorum D H I K & D N O P, illius D H, huius D P crura fiant trianguli rectanguli H D P, tertium latus H P, per 47 Primi Euclidis, æquale erit quadratis laterum D H & D P; adeóque quadratum ex H P deſcriptum æquale erit ſegmento maiori C G D

Neque aliter conſtruitur quadratum æquale ſegmento minori C M D, ſi primum quadrata conſtituta ſint æqualia ſectori minori A C M D, & triangulo A C D, dempto enim hoc quadrato ex illo,

relinquitur quadratum ſegmento C M D minori æquale. Quæ facere oportuit.

Ex ijs autem quæ hucuſque demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, quomodo etiam, *plana ovata*, μηνίσκοι, *lenticulæ*, aliæq́uæ figuræ, quæ vel ex ſolis circuli ſegmentis, vel ex ſegmentis circuli, & rectilineis figuris ſimul, conſtruuntur, poſſint τετραγωνίζειν: omninò enim à ſuperiori doctrina pendent, & ſigillatim exemplis oſtendi poſſunt; at μηδὲν ἄγαν. Quare vela contraho, contentus digitum ad fontem intendiſſe — ἀμείνω δ᾽ ἄισιμα πάντα.

Hactenus paucis elementis, utramque Cyclometriæ partem complexus ſum: Lectoris benevoli erit iſtis uti cum gratia, ſibiq́ue eadem utilia facere tum legendo, tum manus operi admovendo. Nam illud Anaxagoræ vel maximè huc quadrat, *manum eſſe ſapientiæ cauſam.*

FINIS.

Graphica aliquot ſphalmata quæ per incnriam irrepſerunt, ita corrigito.

Pag.4.lin.25. radiuſqueerectus,lege radiuſque erectus.
Pag.35.lin.vltima,rationem.Archimedæa,lege rationem Archimedæa.
Pag.38.lin.27.continetur,lege continuetur.
Pag.42.lin.14.quodrantis,lege quadrantis.
Pag.45.lin,8.& 9.Quadranti,lege Quadrans.
Pag.52.in ſecunda diagrapha,ponatur l litera è regione Q.